GRUNDLAG

FOR

FLADERNES GEOMETRI

AF

J. HJELMSLEV

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. XII. 1

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1914

INDLEDNING.

Nærværende Arbejde tilstræber en lignende Bearbejdelse af Grundlaget for Fladernes Geometri som den, jeg tidligere har gennemført for Kurvernes Vedkommende[1]). Ogsaa her viser det sig, at det foreliggende analytiske Grundlag gennemgaaende har for ringe Tilknytning til de geometriske Former. Hvilke Flader, det egentlig er, man behandler, naar man regner med de sædvanlige fundamentale Differentialformer, er næppe nogensinde undersøgt, og en naturlig geometrisk Definition af Fladebegrebet som Udgangspunkt for Anvendelsen af disse Differentialformer næppe forsøgt. I det følgende skal nu gives et Bidrag til at udfylde denne Mangel.

Saalænge der er Tale om endimensionale Varieteter har det vist sig, at Formerne fik den naturligste Afgrænsning gennem Principet om de monotone Dannelser. Som den simpleste Kurvetype i en endelig Del af Planen vælger man saaledes en Kurve, som i ethvert af sine Punkter har en bestemt Tangent med modsat rettede Halvtangenter (bortset fra Kurvens Endepunkter), hvis Retning varierer monotont eller i hvert Fald afdelingsvis monotont, naar Røringspunktet monotont gennemløber Kurven. Dette leder til, at man i Hovedsagen som den simpleste Type for dobbeltkrumme Flader vælger en saadan Flade, som i ethvert af sine Punkter har en bestemt Tangentplan (der udfyldes af alle Halvtangenter i Punktet), altsaa ogsaa en bestemt Normal, idet man yderligere forlanger, at Punktet paa Fladen og den tilhørende Normals Retning i Rummet skal svare kontinuert og en-entydig (eller i hvert Fald afdelingsvis en-entydig) til hinanden. Dette kan — under Brug af kendte Udtryk — ogsaa formuleres saaledes, at den sfæriske Afbildning foruden at være kontinuert skal være en-entydig, i hvert Fald afdelingsvis.

Dernæst stiller man visse Krav til Krumningsforhold. Som Grundlag for de herhen hørende Bestemmelser plejer man at benytte Krumningen af visse Kurver paa Fladen (Normalsnit, Hovedsnit o. s. v.) eller rettere udtrykt, højere Differentialkvotienter af de Funktioner, hvorved man tænker sig Fladen analytisk fremstillet.

[1]) J. Hjelmslev: Darstellende Geometrie, Leipzig 1914 (H. E. Timerding: Handbuch d. angew. Math., II. Teil); Introduction à la théorie des suites monotones (Oversigt o. d. kgl. danske Videnskabernes Selsk. Forh. 1914 Nr. 1); Die Geometrie der Wirklichkeit (*Acta mathematica* 1914); Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle (Oversigt o. d. kgl. danske Videnskabernes Selsk. Forh. 1911 Nr. 5).

Det ligger nær at begynde med at forlange, at det dobbelte System af Frembringerkurver, som i Regelen naturlig frembyder sig baade ved analytiske og syntetiske Undersøgelser, overalt har bestemt, kontinuert varierende Krumning. Men dette vil, som bekendt, ikke give tilstrækkelige Betingelser for, at alle Normalsnit i ethvert Punkt af Fladen har bestemte Krumninger. Det er saaledes f. Eks. ikke tilstrækkeligt for Fladen $z = f(x, y)$, at $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ og $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ eksisterer og varierer kontinuert med (x, y); man maa ogsaa som independent Betingelse optage Eksistensen og Kontinuiteten af $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, hvis geometriske Betydning ikke umiddelbart frembyder sig. Der opstaar derfor Spørgsmaal om et naturligere Udgangspunkt for Krumningsbestemmelserne. Og et saadant finder man ved at sætte den sfæriske Afbildning og den saakaldte Flexion i Forgrunden. Man forlanger for det første, at der paa Fladen findes 2 Systemer af Frembringerkurver med kontinuert varierende Halvtangenter, saaledes at de tilsvarende Kurvesystemer i den sfæriske Afbildning ogsaa har kontinuert varierende Halvtangenter, og dernæst, at der i hvert Punkt af Fladen langs hver af de gennem Punktet gaaende Frembringerkurver skal eksistere en bestemt Flexionsradius, d. v. s. en bestemt Grænseværdi for Forholdet mellem en mod Nul konvergerende Bue paa Frembringerkurven og den tilsvarende Bue i den sfæriske Afbildning, hvilken sidste Bue er lig Vinklen mellem Fladens Normaler i den først nævnte Bues Endepunkter. Den reciproke Værdi af det nævnte Forhold kaldes Flexionen i det betragtede Punkt langs vedkommende Kurve. Naar der for hvert Punkt af Fladen eksisterer 2 saadanne Flexioner ($\neq 0$ og ∞), svarende til de to Frembringerkurver gennem Punktet, og disse Flexioner varierer kontinuert med Punktet, viser det sig, at Fladen opfylder de sædvanlige Betingelser, som knytter sig til Anvendelsen af de saakaldte Fundamentalformer. I det følgende bliver dette paavist i Enkeltheder, og samtidig gennemføres en Undersøgelse over de Egenskaber af rent geometrisk Natur, som knytter sig til det definerede Fladebegreb.

Til sidst defineres som almindelig Type for de ukonvekse Flader en saadan Flade, hvis Hovedtangenter kun har eet Punkt (Røringspunktet) fælles med Fladen. Og det paavises, at Hovedtangentkurverne paa saadanne Flader altid er simple Rumkurver, saaledes at det ene System overalt er snoet venstre om, medens det andet overalt er snoet højre om. Tillige vises det, at Omegnen af hvert Punkt paa en saadan Flade højst har 3 Punkter fælles med en ret Linie. Endelig opstilles analytiske Betingelser for, at en Flade tilhører den nævnte Type.

Til sidst gives nogle vigtige infinitesimal-geometriske Sætninger angaaende plane Kurver med Vendepunkter, som Indledning til forskellige Undersøgelser over Krumningsforhold paa Fladen.

I. Simple Flader.

1. Ud fra et geometrisk Synspunkt finder vi det naturligt at begynde med følgende Definition af et simpelt Fladestykke:

Et simpelt Fladestykke er en Punktmængde, der kan gennemløbes af 2 variable ikke lukkede Kurver uden Dobbeltpunkter, saaledes at de to Rækker af Kurver (Frembringerkurver), som opstaar paa denne Maade, opfylder følgende Betingelser:

1. I ethvert indre Punkt af en Frembringerkurve findes to modsat rettede Halvtangenter til Kurven; i hvert Endepunkt af en Frembringerkurve findes en bestemt Halvtangent.

2. To Frembringerkurver af samme Art har intet Punkt fælles; to Frembringerkurver af modsat Art har eet og kun eet Punkt fælles, men har aldrig fælles Tangent i dette Punkt.

3. Naar et Punkt P varierer kontinuert paa Fladestykket, vil de to Tangenter i P til de gennem P gaaende Frembringerkurver begge variere kontinuert.

Indre Punkter af Fladestykket er saadanne Punkter, som er indre Punkter paa begge de Frembringerkurver, hvorpaa de er beliggende. De øvrige Punkter af Fladestykket kaldes Randpunkter.

2. Lad P og Q være 2 Punkter af et simpelt Fladestykke (Fig. 1), a og a_1 de gennem Punkterne gaaende Frembringerkurver af første Art. Den Frembringerkurve b af anden Art, som gaar gennem P skæres af a_1 i R. Naar nu P ligger fast og Q konvergerer mod P, vil R ogsaa konvergere mod P. En Plan som indeholder P, Q og R vil være parallel med en Tangent til Buen QR af Kurven a_1, og denne Tangent vil ved Grænseovergangen konvergere mod Tangenten til a i P; samtidig vil Linien PR konvergere mod Tangenten til b i P. Naar Q ved Grænseovergangen, i hvert Fald tilsidst, falder udenfor Kurven b, ses det altsaa, at Planen PQR faar en entydig ved Tangenterne til a og b bestemt Grænsestilling Π, og alle Grænsestillinger for Linien PQ maa derfor falde i denne Plan Π (i det Tilfælde da Q under Grænseovergangen stadig antager Stillinger, der ligger paa b, betyder dette jo kun, at de paagældende Grænsestillinger for PQ falder sammen med Tangenten til b. Vi har altsaa følgende Sætning:

I ethvert Punkt P af et simpelt Fladstykke findes en til Punktet entydig svarende Tangentplan Π, indeholdende samtlige Grænsestillinger for de rette Linier, som forbinder P med variable mod P konvergerende Fladepunkter. Tangentplanen er bestemt ved Tangenterne til de to Frembringerkurver i P og varierer derfor kontinuert med P.

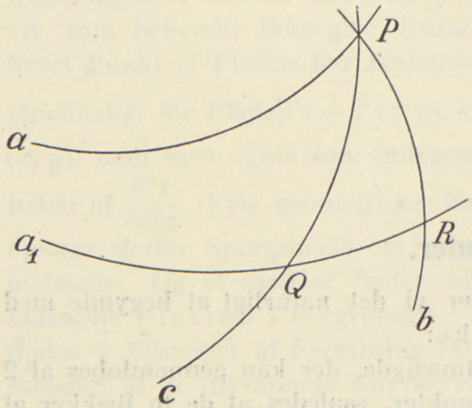

Fig. 1.

Vi kan endvidere tilføje, at i ethvert indre Punkt af Fladestykket vil Tangentplanen have alsidig Berøring med Fladen, d. v. s. alle Halvlinier, der udgaar fra P og ligger i Tangentplanen, er Grænsestillinger for Halvlinier, der udgaar fra P og indeholder variable mod P konvergerende Fladepunkter. I et Randpunkt vil derimod kun en bestemt Halvplan eller et Udsnit af Tangentplanen komme i Betragtning.

3. Naar to variable Punkter A og B af et simpelt Fladestykke konvergerer mod en fælles Grænsestilling P, vil enhver Grænsestilling for den rette Linie AB nødvendigvis ligge i Punktet P's Tangentplan.

Bevis: To Frembringerkurver a og b af modsat Art gennem henholdsvis A og B skærer hinanden i C, der foreløbig antages forskellig fra A og B. En Plan gennem A, B og C maa nu være parallel med to Tangenter til Buerne henholdsvis AC og BC paa Kurverne a og b, og da disse to Tangenter ved Grænseovergangen konvergerer mod de to Frembringerkurvers Tangenter i P, vil Planen ABC altsaa konvergere mod Tangentplanen i P, og herved er Sætningen bevist. Det Tilfælde, hvor C falder i A eller B, behandles let.

Korollar: Naar 3 forskellige Punkter A, B, C paa et simpelt Fladestykke konvergerer mod samme Punkt P, og ingen Grænsestilling for AB er sammenfaldende med en Grænsestilling for BC, vil Planen ABC konvergere mod Tangentplanen i P.

4. Det er nu klart, at man, svarende til enhver Retning r, som ikke er parallel med Tangentplanen i Punktet P, maa kunne afgrænse en saadan Omegn Ω omkring P, at der inden for Ω ikke findes noget Punkt, hvis Tangentplan er parallel med r, og saaledes, at ingen Forbindelseslinie mellem 2 Punkter i Ω er parallel med r; i et retvinklet Koordinatsystem, hvis z-Akse er parallel med r, kan man da fremstille Ω ved en Ligning af Formen $z = f(x, y)$, hvor begge Differentialkvotienterne $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ eksisterer og er kontinuert varierende med Værdiparret (x, y). At omvendt en Ligning af denne Form og under de nævnte Betingelser, inden for et passende sammenhængende Omraade omkring hvert Punkt, fremstiller et simpelt

Fladestykke, følger umiddelbart af den opstillede Definition, idet man som Frembringerkurver benytter plane Snit parallele med xz- og yz-Planen.

Naar en Plan indeholder et indre Punkt P af et simpelt Fladestykke, og Planen ikke er Tangentplan i Punktet, vil den Punktmængde, der er fælles for Planen og Fladestykket i en passende Omegn af P, udgøre en sammenhængende Bue, paa hvilken P er et indre Punkt, og som i ethvert af sine indre Punkter har bestemte, modsat rettede, med Røringspunktet kontinuert varierende Halvtangenter. Dette følger direkte af en kendt Sætning om Funktioner af 2 variable[1]), idet man fremstiller Fladen ved en Ligning af Formen $z = f(x, y)$, i et Koordinatsystem, hvor den nævnte Plan er xy-Plan.

II. Meusniers Theorem og beslægtede Sætninger.

5. Naar to Kurver paa et simpelt Fladestykke har et Punkt P fælles, og de desuden har fælles entydig bestemt Tangent i P og fælles entydig bestemt Oskulationsplan i P, hvilken sidste er forskellig fra Fladens Tangentplan i Punktet, saa vil en Cirkel, der er oskulerende Cirkel for den ene Kurve i P, ogsaa være oskulerende Cirkel for den anden Kurve i P[2]).

Bevis: En Plan vinkelret paa de to Kurvers fælles Tangent antages at skære Tangenten i et Punkt Q og de to Kurver i Punkterne R_1 og R_2; naar nu Planen varierer saaledes, at Q, R_1, R_2 samtidig konvergerer mod P, saa vil Linien R_1R_2, som jo er vinkelret paa PQ, i Følge 3 faa en Grænsestilling n_1 som ligger i Tangentplanen, og som tillige er fælles Normal til begge Kurverne; Linierne QR_1 og QR_2 vil samtidig konvergere mod den fælles Hovednormal n til Kurverne. Da n og n_1 ikke falder sammen, har man

$$\frac{QR_1}{QR_2} \to 1,$$

altsaa

$$\frac{(PQ)^2}{QR_1} : \frac{(PQ)^2}{QR_2} \to 1,$$

d. v. s. Kurverne har i P fælles oskulerende Cirkel. (Nøjagtigere udtrykt: Enhver Cirkel, som er oskulerende Cirkel for den ene Kurve i P, vil ogsaa være oskulerende Cirkel for den anden Kurve). Dette gælder ogsaa, selv om der er Tale om en oskulerende Cirkel med Radius 0 eller ∞.

6. Naar t er en Tangent i et Punkt P af et simpelt Fladestykke, og en vilkaarlig Plan Π_1 gennem t, forskellig fra Tangentplanen Π

---

[1]) Se f. Eks. W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* I, Leipzig u. Berlin 1907, S. 48.

[2]) Ved en oskulerende Cirkel til en Kurve k i et Punkt P forstaas en Grænsestilling for en variabel Cirkel, der rører k i P og gaar gennem et variabelt Punkt Q af k, der konvergerer mod P. Ved en oskulerende Plan (eller Oskulationsplan) i P forstaas ligeledes en Grænsestilling for en variabel Plan, der indeholder Tangenten i P og gaar gennem det variable Punkt Q.

i P, skærer Fladen i en Kurve, som i P har en bestemt oskulerende Cirkel, saa vil alle Planer gennem t (Tangentplanen Π ikke medregnet) skære Fladen i Kurver, som har bestemte oskulerende Cirkler i P, og alle disse Cirkler vil ligge paa en Kugle som berører Fladen i P.

Bevis: Lad to af de nævnte Kurver ligge i Planerne Π_1 og Π_2. En Plan $\Sigma \perp t$ antages at skære Kurverne i R_1 og R_2; endvidere skærer den Tangenten t i Q. Da Linierne QR_1 og QR_2 har konstante Retninger, medens Linien R_1R_2 konvergerer mod en Tangent til Fladen $\perp t$, naar R_1 og R_2 (og Q) konvergerer mod P, saa faar man

$$\frac{QR_1}{QR_2} \to \frac{\sin(\Pi\Pi_1)}{\sin(\Pi\Pi_2)},$$

altsaa

$$\frac{(PQ)^2}{QR_2} \to \frac{\sin(\Pi\Pi_1)}{\sin(\Pi\Pi_2)} \cdot \lim \frac{(PQ)^2}{QR_1},$$

d. v. s. naar Snittet i Π_1 har en bestemt oskulerende Cirkel, vil Snittet i Π_2 ogsaa have en bestemt oskulerende Cirkel, og de to Cirklers Diametre forholder sig som $\sin(\Pi\Pi_2) : \sin(\Pi\Pi_1)$. Heraf følger da, at de to Cirkler ligger paa en Kugle, som rører Π i P, og hermed er Sætningen bevist.

Som man ser, vil Resultatet ogsaa være rigtigt, selv om specielt Snittet i Π_1 har uendelig stor eller uendelig lille oskulerende Cirkel; i første Tilfælde vil den nævnte Kugle blive til en Plan (Tangentplanen), i det andet Tilfælde svinder den ind til et Punkt.

Blandt de forskellige plane Snit gennem t findes specielt et Normalsnit d. e. et Snit, som indeholder Fladens Normal i P. Sætningen ovenfor indeholder det saakaldte Meusniers Theorem, som siger, at Krumningsradierne i de skraa Snit fremkommer som Projektioner af Normalsnittets Krumningsradius ind paa de forskellige Snitplaner. Men den her fremsatte Sætning har aabenbart en væsentlig større Rækkevidde end den, som tilkommer det oprindelige Meusnier's Theorem.

III. Normflader.

7. Selv om de Flader, som naturlig vil komme til Anvendelse ved Undersøgelser, der har umiddelbar Forbindelse med Virkeligheden, i Almindelighed giver Anledning til Betragtning af mere sammensatte Former end saadanne, som direkte falder ind under det, som i det foregaaende er blevet betegnet som et „simpelt Fladestykke“, saa vil det dog altid være saaledes, at de mere sammensatte Former kan fremstilles ved Sammensætning af et endeligt Antal simple Fladestykker, og det vil derfor være muligt omkring hvert Punkt paa Fladen at afgrænse en saadan Omegn, at kun et enkelt simpelt Fladestykke kommer i Betragtning, og dette vil ved Undersøgelser af infinitesimal Natur altid være tilstrækkeligt.

Det er under Hensyn hertil, at vi i det følgende stadig indskrænker Undersøgelserne til simple Fladestykker, eller endog inden for disse foretager yderligere konventionelle Afgrænsninger af de Omraader, som tages op til Undersøgelse.

8. Vi betragter nu den sædvanlige Gauss'iske Afbildning af Fladen, idet vi vælger en Kugle, hvis Radius er lig Længdeenheden, og til hvert Punkt P paa Fladen lader vi svare et Punkt P' paa Kuglen, saaledes, at Fladen og Kuglen i P og P' har parallele Normaler, altsaa ogsaa parallele Tangentplaner. Til hvert Punkt P vil man paa denne Maade have Valget mellem to tilsvarende diametralt modsatte Punkter P' paa Kuglen, beliggende paa en Diameter p, der svarer entydig til P. Vi gør nu den Antagelse, at man paa Fladen kan afgrænse et Omraade Ω, i hvilket P er et indre Punkt, og som ikke indeholder 2 forskellige Punkter med parallele (eller sammenfaldende) Tangentplaner. Lader man P variere paa vilkaarlig Maade inden for dette Omraade, vil den tilsvarende Diameter p i Kuglen variere saaledes, at den er bundet til et vist konisk Rum, og da p varierer kontinuert med P, kan man vælge Ω saa lille, at den spidse Vinkel mellem to Kuglediametre inden for dette koniske Rum i Størrelse ikke kan overskride en vis vilkaarlig valgt spids Vinkel ε, og det nævnte koniske Rum vil da aabenbart kunne overskæres med en Plan saaledes, at Snittet bliver et plant Omraade Ω_1, der ligger helt i det endelige. Projiceres nu dette Omraade Ω_1 ved Halvlinier, der udgaar fra Kuglens Centrum, ind paa Kuglens Overflade, vil man derved faa bestemt et Omraade Ω' paa Kuglen, der svarer en-entydig til Ω. Paa denne Maade kan man altsaa omkring Punktet P paa Fladen afgrænse et Omraade, som ved passende Valg af den sfæriske Afbildning transformeres en-entydig ved denne. Til en Kurve k i Ω vil svare en Kurve k' i Ω'; er k uden Dobbeltpunkter, vil k' ogsaa være det, og omvendt. Betragter man 2 Punkter P og Q af k og de tilsvarende Punkter P' og Q' af k', og lader man Q konvergere mod P langs Kurven k, saa at Q' samtidig konvergerer mod P' langs k', da kan der blive Tale om en Grænseværdi for Forholdet mellem Længden af Buen PQ paa k og den sfæriske Afstand (eller den retlinede Afstand) $P'Q'$ paa Kuglen, hvilken sidste Afstand maales ved Vinklen mellem Fladens Normaler p og q i P og Q. En saadan Grænseværdi betegnes som Fladens Flexionsradius i Punktet P langs Kurven k, medens den reciproke Værdi:

$$\lim \frac{P'Q'}{PQ} = \lim \frac{(pq)}{PQ}$$

betegnes som Flexionen i P langs k.

9. Vi vil nu gaa ud fra, at det foreliggende simple Fladestykke opfylder følgende Betingelser:

1. Fladestykket har en en-entydig sfærisk Afbildning; ved denne Afbildning transformeres Fladestykket til et simpelt Fladestykke paa Kuglen, saaledes at det oprindelige Fladestykkes 2 Systemer af Frembringerkurver føres over i Frembringerkurver paa det sfæriske

Fladestykke, hvilke sidste Kurver opfylder de tidligere nævnte Betingelser for Frembringerkurver paa et simpelt Fladestykke.

2. I hvert Punkt P af Fladestykket eksisterer der langs hver af de to gennem Punktet gaaende Frembringerkurver en entydig bestemt Flexion, som aldrig antager nogen af Værdierne 0 eller ∞.

3. De to Flexioner i P varierer kontinuert, naar P varierer kontinuert paa Fladen.

Naar disse Betingelser alle er opfyldt, betegnes Fladestykket som en Normflade.

10. Vi vil nu bevise, at der til hvert Punkt P af en Normflade og til en bestemt Tangentretning r i P svarer en ganske bestemt Flexion f, saaledes at Flexionen i P langs hver Kurve paa Fladen, som tangerer r i P, har Værdien f.

Paa Normfladen betragter vi den krumlinede Firkant $PACB$, som begrænses af de 4 Frembringerkurver a, b, a_1, b_1, samt en vilkaarlig Kurve c, med overalt modsat rettede, kontinuert varierende, Halvtangenter, som Diagonal PC i Firkanten. Paa Fig. 2 er angivet den tilsvarende Figur $P'A'C'B'$ med de tilsvarende Kurver i

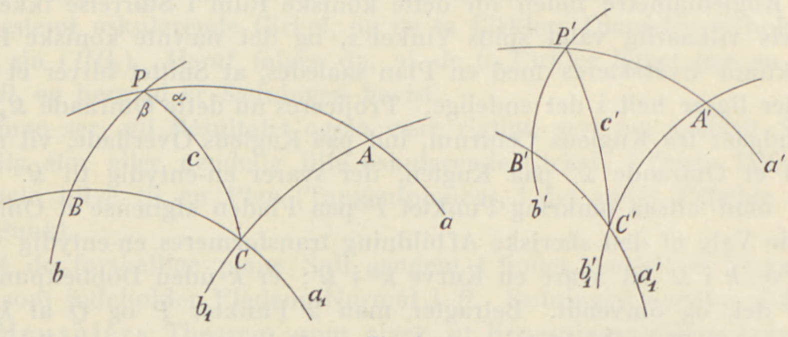

Fig. 2.

den sfæriske Afbildning. Vi betragter dernæst en Grænseovergang, som fører C langs c ind mod P, medens a_1 og b_1 gaar mod a og b. Flexionerne i P langs a og b betegnes med henholdsvis f_1 og f_2. Man har da:

$$\lim \frac{P'A'}{PA} = f_1, \quad \lim \frac{P'B'}{PB} = f_2,$$

men man har ogsaa:

$$\lim \frac{A'C'}{AC} = f_2;$$

dette sidste indser man paa følgende Maade:

Lad Forholdet mellem Buelængderne $A'C'$ og AC i Øjeblikket være μ, og lad Midtpunktet af Buen AC være M, medens det tilsvarende Punkt paa Buen $A'C'$ i den sfæriske Afbildning er M'. Det er da klart, at af de to Forhold $\frac{A'M'}{AM}$ og $\frac{M'C'}{MC}$, hvor baade Tællerne og Nævnerne er Buelængder paa de betragtede Kurver b_1' og b_1, maa det ene være større end μ og det andet mindre end μ, hvis ikke begge Forhold er lig μ. Lader man nu 2 Punkter R og S bevæge sig saaledes paa Buen AC, at Buelængden RS stadig er Halvdelen af Buelængden AC, idet den til at begynde med dækker Buen AM og til Slut Buen MC, da vil de tilsvarende Punkter R' og S' paa Buen $A'C'$ i den sfæriske Afbildning bevæge sig paa denne Bue saaledes, at Buen $R'S'$ til at begynde med dækker Buen $A'M'$ og til Slut Buen $M'C'$. Da nu Forholdet mellem Buelængderne $R'S'$ og RS under den nævnte Bevægelse af R og S varierer kontinuert, maa der efter ovenstaaende Bemærkning eksistere mindst en Stilling af RS for hvilken det nævnte Forhold netop er lig μ. Dette Ræsonnement gentages nu, idet man inden for den fundne Bue RS atter finder en Bue R_1S_1 af halvt saa stor Længde som RS, saaledes at Forholdet mellem den tilsvarende Bue $R_1'S_1'$ i den sfæriske Afbildning og Buen R_1S_1 selv netop har Værdien μ. Herved bestemmes en Række Buer, RS, R_1S_1, R_2S_2, ... , hvoraf enhver ligger inden i den foregaaende og har halvt saa stor Længde som denne. Lad Grænsepunktet for disse Buer være U, og det tilsvarende Punkt i den sfæriske Afbildning U'. Det er da klart, at Flexionen i U langs b_1 maa have Værdien μ. Dette er umiddelbart indlysende, hvis Buerne R_1S_1, R_2S_2, ..., i hvert Fald fra en vis Indeks at regne, har et fælles Endepunkt; og har de ikke det, saa har man Flexionen i U udtrykt ved:

$$\lim \frac{R'_iU'}{R_iU} = \lim \frac{U'S'_i}{US_i} = \lim \frac{R'_iS'_i}{R_iS_i} = \mu.$$

Paa Buen AC findes der altsaa sikkert et Punkt U, hvor Flexionen netop er lig Forholdet mellem Buerne $A'C'$ og AC; men naar A og C konvergerer mod P, idet Kurven b_1 gaar mod b, saa maa U ogsaa konvergere mod P og Flexionen i U langs b_1 konvergerer da efter vore Forudsætninger mod Flexionen i P langs b. Man har derfor, som ovenfor nævnt

$$\lim \frac{A'C'}{AC} = f_2.$$

Nu vil fremdeles den krumlinede Trekant PAC konvergere mod en bestemt Grænseform, idet dens Vinkler ved P og C konvergerer mod bestemte Vinkler α og β, og Forholdene mellem dens Sider konvergerer saaledes mod bestemte Grænseværdier. Vi tegner derfor en plan Trekant $P_1A_1C_1$ (Fig. 3) med Vinklerne α og β ved P_1 og C_1 og har da

Grænseværdien for $\frac{PA}{AC}$ fremstillet ved $\frac{P_1A_1}{A_1C_1}$

Efter ovenstaaende Ligninger faar man nu:

$$\lim \frac{P'A'}{A'C'} = \frac{f_1}{f_2} \lim \frac{PA}{AC} = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{P_1A_1}{A_1C_1}.$$

Heraf ses altsaa, at Forholdet $\frac{P'A'}{A'C'}$ konvergerer mod en bestemt Værdi ($\neq 0$ og ∞), og da tillige

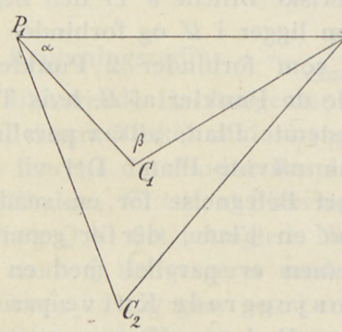

Fig. 3.

Vinklen $P'A'C'$ konvergerer mod en bestemt Værdi ($\neq 0$ og 180°), saa følger heraf, at den krumlinede Trekant $P'A'C'$ har en bestemt Grænseform, der kan fremstilles ved en plan Trekant $P_1A_1C_2$, hvor $\angle P_1A_1C_2 = \lim P'A'C'$.

Da nu
$$\lim \frac{P'C'}{PC} = \lim \frac{P'C' : P'A'}{PC : PA} \cdot f_1,$$
følger heraf
$$\lim \frac{P'C'}{PC} = \frac{P_1C_2 : P_1A_1}{P_1C_1 : P_1A_1} \cdot f_1 = \frac{P_1C_2}{P_1C_1} \cdot f_1.$$

Der gives altsaa en bestemt Flexion i P langs med c. Naar Retningen af Tangenten til c i P varierer, vil Flexionen variere, saaledes som Formlen og Figuren straks bestemmer. Lader vi i Figuren C_2 gennemløbe en Cirkel med Centrum P_1 og Radius 1, vil C_1 gennemløbe en Ellipse med Centrum P_1 (fordi C_1 og C_2 stadig svarer til hinanden i en perspektivisk Affinitet med Aksen P_1A_1), og Halvdiametrene i denne Ellipse vil aabenbart fremstille Flexionsradierne svarende til de forskellige Tangentretninger. Lægger man Figuren i Tangentplanen Π i Punktet P, saaledes at P_1 falder i P og P_1A_1 paa Tangenten til a i P, saa vil den nævnte Ellipse give en meget overskuelig Fremstilling af Flexionsradierne svarende til de forskellige Tangentretninger i P. Denne Ellipse betegner vi som Flexionsellipsen i Punktet P.

Altsaa: For hvert Punkt P af en Normflade existerer der en bestemt i Tangentplanen beliggende Ellipse (Flexionsellipsen) med Centrum P, hvis Halvdiametre angiver de til Diametrenes Retninger hørende Flexionsradier.

Det fremgaar ogsaa af vore Betragtninger, at naar en Tangent til Fladen og det tilhørende Røringspunkt varierer kontinuert, vil den dertil svarende Flexion ogsaa variere kontinuert, samt at Flexionen aldrig antager Værdien 0 eller ∞.

11. Vi vil for Kortheds Skyld indskrænke vore Betragtninger til et saadant Stykke Ω af Normfladen, at hele det sfæriske Billede Ω' af dette Stykke udgør en Kuglekalot (mindre end en Halvkugle). Ω begrænses da af en lukket Kurve σ, hvis sfæriske Billede σ' er den begrænsende Cirkel for Kalotten Ω'. En Storcirkelbue k', som ligger i Ω' og forbinder 2 Punkter af σ' med hinanden, svarer i Ω til en Kurve k, som forbinder 2 Punkter af Randkurven σ med hinanden, og som indeholder alle de Punkter af Ω, hvis Tangentplaner er vinkelrette paa den ved Storcirklen k' bestemte Plan, altsaa parallele med en fast Retning, nemlig den, der er vinkelret paa nævnte Plan. Det vil være nyttigt her og i det følgende, at vi indfører en kort Betegnelse for en saadan Kurve, og vi vil derfor fastsætte, at enhver Kurve paa en Flade, der er geometrisk Sted for de Punkter paa Fladen, hvor Tangentplanen er parallel med en fast Retning r betegnes som den til Retningen r konjugerede Kurve paa Fladen. Vi kan da udtale følgende Sætning:

Enhver Kurve paa Ω, der er konjugeret med en bestemt Retning r, er en Kurve uden Dobbeltpunkter, som forbinder 2 Punkter af Randkurven med hinanden, og som i ethvert af sine indre Punkter har 2 bestemte, modsat rettede, Halvtangenter, der varierer kontinuert med Røringspunktet.

12. Da de rette Linier P_1C_1 og P_1C_2 i Fig. 3 er tilsvarende Linier i 2 projektive Liniebundter, ser man efter ovenstaaende tillige, at Tangentretningerne r i P og de tilsvarende Tangentretninger for de til r konjugerede Kurver i P maa danne 2 projektive Liniebundter.

13. Ved et Normalsnit i Punktet P af Fladen forstaar vi som nævnt et plant Snit, hvis Plan indeholder Normalen i P. I Figur 4 er PQ en Bue af et Normalsnit, hvis Plan antages at falde sammen med Tegneplanen. Fladenormalen p i P ligger altsaa i Tegneplanen, medens Normalen q i Q ikke i Almindelighed kan antages at ligge i denne Plan. q projiceres paa Tegneplanen i q_1; q_1 maa da være Normal til Buen PQ i Q. q_1 og p skærer hinanden i O, gennem hvilket Punkt vi drager q_2 parallel med q. q_2 projiceres paa Tegneplanen i q_1.

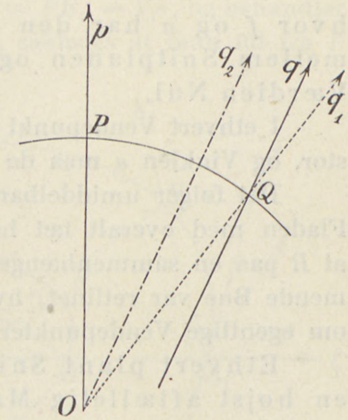

Fig. 4.

Flexionsradien i P langs PQ kan da udtrykkes ved

$$f = \lim \frac{PQ}{(pq)} = \lim \frac{PQ}{(pq_2)},$$

og idet man betegner Grænseværdien for Vinklen mellem de to Halvplaner $p(q_1)$ og $p(q_2)$ (d. e. saadanne Halvplaner som begrænses af p og indeholder to sammenhørende positive Retninger paa q_1 og q_2) med α, vil man have

$$\lim \frac{tg\,(pq_1)}{tg\,(pq_2)} = \cos\alpha,$$

og man faar da efter ovenstaaende Ligning:

$$\frac{f}{\cos\alpha} = \lim \frac{PQ}{(pq_1)}.$$

Altsaa har Normalsnittet PQ i P en bestemt Krumningsradius $\rho = \frac{f}{\cos\alpha}$. Vinklen α fremstilles aabenbart ved Vinklen mellem tilsvarende Halvtangenter til Buen PQ og dennes sfæriske Afbildning. Størrelsen af denne Vinkel skal vi snart beskæftige os nærmere med; men foreløbig vil vi kun benytte det fundne Resultat til at drage en vigtig Slutning angaaende plane Snit i Fladen. Vi ved, at Skæringspunktet O mellem Normalerne p og q_1 i Punkterne P og Q til det betragtede Normalsnit konvergerer mod en bestemt Grænsestilling, naar Q konvergerer mod P. Da man nu fra Centrum for en Cirkel, der rører Kurven i P og gaar gennem Q altid kan fælde en Normal til Buen PQ, vil dette Centrum ved Grænseovergangen faa samme Grænsestilling som O, d. e. Normalsnittet har i P en bestemt oskulerende Cirkel med Radius ρ. Ved Hjælp af Meusnier's Teorem i den tidligere nævnte almindelige Form kan man derefter indse, at ethvert plant Snit i Fladen i ethvert af sine Punkter, hvor Snitplanen ikke berører Fladen, har en bestemt med Punktet kontinuert varierende oskulerende Cirkel. Denne Cirkels Radius udtrykkes ved

$$R = \frac{f}{\cos\alpha} \cdot \cos\beta$$

hvor f og α har den ovennævnte Betydning, og hvor β er Vinklen mellem Snitplanen og Fladenormalen. R kan altsaa aldrig antage Værdien Nul.

I ethvert Vendepunkt paa Snitkurven maa R altsaa nødvendigvis være uendelig stor, og Vinklen α maa da være ret.

Det følger umiddelbart heraf, at der ikke kan forekomme noget plant Snit i Fladen med overalt tæt beliggende Vendepunkter, da dette nemlig vilde medføre, at R paa en sammenhængende Bue af Snittet var uendelig stor, altsaa at vedkommende Bue var retlinet, hvorved paa den anden Side der saa ikke kan være Tale om egentlige Vendepunkter. Man slutter heraf, at

Ethvert plant Snit i Fladen kan dannes ved Sammensætning af en højst aftællelig Mængde konvekse Buer eller rette Liniestykker med Tilføjelse af de herved opstaaede Fortætningspunkter.

IV. Konvekse Fladepunkter.

14. Efter Tangentplanens Stilling til Fladen i Omegnen af Røringspunktet P skelner vi for Normfladers Vedkommende mellem konvekse og ukonvekse Fladepunkter. Et konvekst Fladepunkt har man, naar det er muligt omkring P ved en lukket Kurve at afgrænse et Fladestykke Σ, som ikke har andre Punkter fælles med Tangentplanen Π i P end selve Punktet P. Danner man nu det mindst mulige konvekse Legeme, som indeholder Σ (hvilket Legeme lader sig bestemme som Stedet for alle Liniestykker, der forbinder 2 Punkter af Σ), saa er det klart, at dette Legemes Overflade maa indeholde en sammenhængende Del af Σ, i hvilken P er et indre Punkt; ellers vilde det nemlig være muligt at finde en Tangentplan (Støtteplan) til det konvekse Legeme, som berører den givne Flade i mere end et Punkt, og dette er efter vore Forudsætninger umuligt. Altsaa:

Enhver Normflade er i Omegnen af et konvekst Fladepunkt en konveks Flade, der højst har 2 Punkter fælles med en ret Linie.

15. En Plan Π_1 parallel med Tangentplanen Π i P og tilstrækkelig nær ved Π skærer Fladestykket Σ i en lukket konveks Kurve k. I Fig. 5 tænker vi os Π beliggende i Tegneplanen, medens k er projiceret paa denne Plan i k'. Et Normalsnit i P har Tangenten t_1 i dette Punkt og skærer k i to Punkter A og B, hvis retvinklede Projektioner paa Π er A' og B'. Dette Normalsnits Krumningsradius ρ i P lader sig udtrykke ved

$$\rho = \lim \frac{PA'^2}{2h} = \lim \frac{PB'^2}{2h},$$

idet h betegner Afstanden mellem Planerne Π_1 og Π, og Grænseovergangen er bestemt ved, at h konvergerer mod Nul.

Afsætter man nu paa Tangenten t_1 Stykkerne $PA_1 = PB_1 = \sqrt{\rho}$, og behandler man de øvrige Fladetangenter i P paa lignende Maade, saaledes at man ud fra P paa hver Tangent afsætter Kvadratroden af den til Normalsnittet gennem vedkommende Tangent hørende Krumningsradius, saa vil de paa denne Maade bestemte, fra P udgaaende Liniestykker, PA_1, PB_1 og de analoge, udfylde et plant Omraade Ω, hvis Begrænsning k_1 vi betegner som **Indicatrix** for Punktet P, og som snart skal vises at være et konvekst Omraade. Det forudsættes foreløbig, at $\rho \neq \infty$. Vi vælger en ny Tangent i P og antager, at den skærer Kurverne k' og k_1 i de til hinanden svarende Punkter M', M_1 og N', N_1; man vil da have, naar h konvergerer mod Nul:

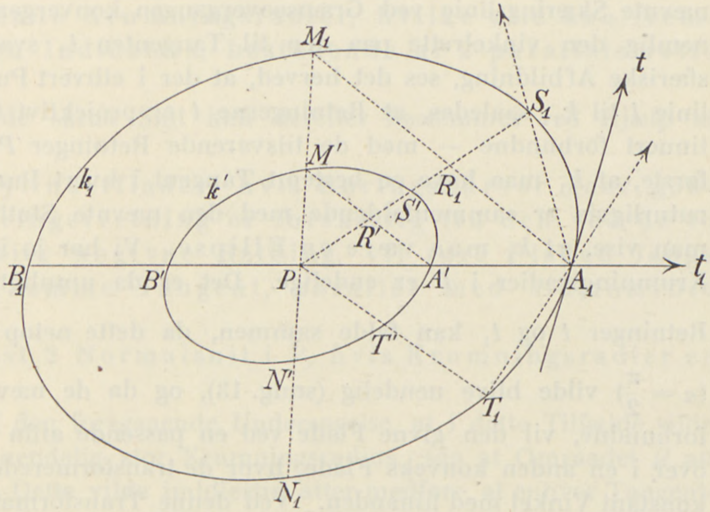

Fig. 5.

$$\lim \frac{PM'}{PA'} = \frac{PM_1}{PA_1},$$

hvoraf følger, at Grænsestillingen for den rette Linie $M'A'$ er parallel med M_1A_1. Er nu R_1 et vilkaarligt Punkt af Liniestykket A_1M_1, og skæres Liniestykket $A'M'$ af Halvlinien PR_1 i Punktet R', medens sidstnævnte Halvlinie skærer k' og k_1 i S' og S_1, saa har man:

$$\lim \frac{PR'}{PA'} = \lim \frac{PR_1}{PA_1}, \lim \frac{PS'}{PA'} = \lim \frac{PS_1}{PA_1}.$$

Da nu stadig $PR' \leqq PS'$, følger heraf $PR_1 \leqq PS_1$, d. v. s. Omraadet Ω indeholder ethvert Liniestykke, hvis Endepunkter ligger paa Omraadets Begrænsning, men det betyder jo netop, at Omraadet er konvekst.

Naar h konvergerer mod Nul, trækker Kurven k' sig sammen om Punktet P. Vi vil tænke os, at de forskellige Punkter af k' under denne Grænseovergang bevæger sig paa rette Linier ind imod P; da de rette Linier $A'S'$, $A'T'$ (se Figuren, hvor S' og T' er valgt paa k' paa modsat Side af A' og senere konvergerer mod dette Punkt) nærmer sig til Grænsestillinger, der er parallele med A_1S_1 og A_1T_1, og da Tangenten til k' i A' altsaa maa nærme sig til en eller flere Grænsestillinger, hvis Retning ligger mellem Retningerne A_1S_1 og T_1A_1, og dette skal gælde, hvor nær man end vælger S_1 og T_1 ved A_1, naar de blot ligger paa modsat Side af A_1, saa kan man heraf slutte, at enhver Grænsestilling for Tangenten i A' til k' maa være parallel med en Støttelinie til k_1 i A_1. Da nu endvidere Tangenten til k' i A' er parallel med Skæringslinien mellem Tangentplanerne i A og i P, og da sidstnævnte Skæringslinie ved Grænseovergangen konvergerer mod en bestemt Retning, nemlig den vinkelrette paa den til Tangenten t_1 svarende Tangentretning i den sfæriske Afbildning, ses det herved, at der i ethvert Punkt A_1 maa findes en Støttelinie t til k_1, saaledes, at Retningerne t er projektivt forbundne — og altsaa kontinuert forbundne — med de tilsvarende Retninger PA_1. Heraf følger da for det første, at k_1 maa have en bestemt Tangent i hvert Punkt, og at denne Tangent saa naturligvis er sammenfaldende med den nævnte Støttelinie t. Men dernæst kan man vise, at k_1 maa være en Ellipse. Vi har jo indtil videre forudsat, at alle Krumningsradier i P er endelige. Det er da umuligt, at 2 til hinanden svarende Retninger t og t_1 kan falde sammen, da dette netop vilde medføre, at $\rho = \frac{f}{\cos \alpha}$ $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ vilde blive uendelig (smlg. 13), og da de nævnte Retninger er projektivt forbundne, vil den givne Flade ved en passende affin Transformation kunne føres over i en anden konveks Flade, hvor de transformerede Retninger t og t_1 danner en konstant Vinkel med hinanden. Ved denne Transformation gaar Ovalen k_1 over i en anden Oval k'_1, hvor Vinklen mellem en radius vector og Tangenten i dens Endepunkt er konstant. Men en saadan Kurve maa nødvendigvis være en Cirkel, og den oprindelige Kurve k_1 er da en Ellipse.

16. Ved denne Undersøgelse var det en Forudsætning, at Kurven k_1 forløber helt i det endelige, altsaa at alle Normalsnit i P har endelig Krumningsradius. For at gøre Undersøgelsen fuldstændig bliver det derfor nødvendigt, at man betragter følgende Muligheder:

1. Der gives eet og kun eet Normalsnit i P med uendelig stor Krumningsradius. Indicatrix k_1 vil i dette Tilfælde bestaa af to parallele Linier l_1, l_2 i samme Afstand fra P. Det følger nemlig umiddelbart af de samme indledende Betragtninger, som vi anstillede ovenfor angaaende Omraadet Ω i det almindelige Tilfælde, at men ogsaa her maa faa med et konvekst Omraade at gøre, og da dettes Begrænsning k_1 nu skal have eet og kun eet uendelig fjernt Punkt, maa den bestaa af 2 parallele rette Linier. Ligesaa ser man videre ved Hjælp af de foregaaende almindelige Betragtninger over Forbindelsen mellem t og t_1, hvilke Betragtninger let overføres paa det foreliggende Tilfælde, at den konjugerede Kurve til en hvilken som helst fra l_1, l_2 forskellig Retning r maa have en Tangent i P,

som stadig er parallel med l_1, l_2. Dette vil imidlertid være udelukket ved Normflader, hvor der til 2 forskellige Retninger r altid maa svare konjugerede Kurver med forskellig Tangent.

Imidlertid fører denne lille Undersøgelse til et Resultat af Interesse for de almindelige konvekse Fladers Theori:

Naar der paa en konveks Flade, hvor hvert Punkt har en bestemt Tangentplan, findes et Punkt P, i hvilket eet og kun eet Normalsnit har uendelig stor Krumningsradius, og der findes et andet Normalsnit med bestemt endelig Krumningsradius, da vil alle Normalsnit i P have bestemte Krumningsradier, hvilke alle kan fremstilles ved Hjælp af en Indicatrix, bestaaende af 2 parallele rette Linier.

Krumningsradierne i de skraa Snit kan derefter bestemmes ved Hjælp af Meusniers Theorem.

Alle omskrevne Cylinderflader, hvis Røringskurver gaar gennem P, og hvis Frembringerretning er forskellig fra den ved de to parallele Indicatrixlinier angivne Retning, vil røre Fladen langs Kurver, der i P har samme Tangent, parallel med sidstnævnte Retning.

2. Der gives mindst 2 Normalsnit i P, hvis Krumningsradier er uendelig store.

Det fremgaar straks af den foregaaende Undersøgelse, at i dette Tilfælde vilde alle Normalsnit i P have uendelig stor Krumningsradius, saa at Omraadet Ω nu vilde udfylde hele Planen. Dette vilde imidlertid atter medføre, at enhver Tangentretning i P maatte falde sammen med Tangenten til den tilsvarende konjugerede Kurve i P, hvilket er umuligt, da man stadig fra P vil kunne fælde en Normal til k' (f. Eks. den mindste eller den største radius vector), hvoraf det fremgaar, at der i Strid med ovenstaaende Resultat maa eksistere en saadan Tangentretning t, at den tilsvarende konjugerede Kurves Tangent er vinkelret derpaa. Det Tilfælde, da Ω udfylder hele Planen, er altsaa udelukket. Men vi noterer følgende almindelige Resultat:

Naar der i et Punkt P af en konveks Flade, der har en bestemt Tangentplan i ethvert af sine Punkter, eksisterer 2 Normalsnit, hvis Krumningsradier er uendelig store, da vil ethvert plant Snit gennem P have uendelig stor Krumningsradius i P.

17. Efter at have undersøgt disse specielle Muligheder, som jo altsaa har vist sig i Virkeligheden at være uden Betydning, saalænge man indskrænker sig til Betragtning af Normflader, kan vi fastslaa følgende Sætning:

I hvert Konvekspunkt P af en Normflade vil Indicatrix være en Ellipse. Til hver Tangentretning t svarer en dertil konjugeret Kurve paa Fladen, som er Røringskurve for en i Retningen t omskreven Cylinderflade, og hvis Tangent t_1 i P er konjugeret med t med Hensyn til Indicatrix. De sammenhørende Tangenter t og t_1 (konjugerede Tangenter) i Punktet P svarer altsaa involutorisk til hinanden.

Mellem de konjugerede Tangentpar i Punktet P findes specielt de to Hovedretninger, Akseretningerne i Flexionsellipsen. De svarer nemlig i den sfæriske Afbildning til 2 paa hinanden vinkelrette Retninger, altsaa i den betragtede Involution atter til 2 paa hinanden vinkelrette Retninger, d. v. s. de maa netop falde sammen med Retvinkelparret i denne Involution. Det er her en Forudsætning, at Flexionsellipsen ikke er en Cirkel; naar dette Tilfælde indtræffer, vil Involutionen af konjugerede Tangenter blive en Orthogonalinvolution, og alle Flexionsradier og Krumningsradier i Normalsnittene i Punktet bliver indbyrdes lige store.

Anvender man den tidligere fundne Relation (13)

$$\rho = \frac{f}{\cos \alpha}$$

paa de gennem Hovedretningerne lagte Normalsnit (Hovedsnittene) faar man $\alpha = 0$, og altsaa $\rho = f$, d. v. s. Hovedsnittenes Krumningsradier er lig de til Hovedretningerne svarende Flexionsradier. Vi kalder disse Radier for Hovedkrumningsradierne. De er lig Halvakserne i Flexionsellipsen.

18. Vi vil nu vise, hvorledes Flexionsellipsen kan anvendes til en simpel Konstruktion af Krumningsradierne i de forskellige Snit og af konjugerede Tangenter i Punktet.

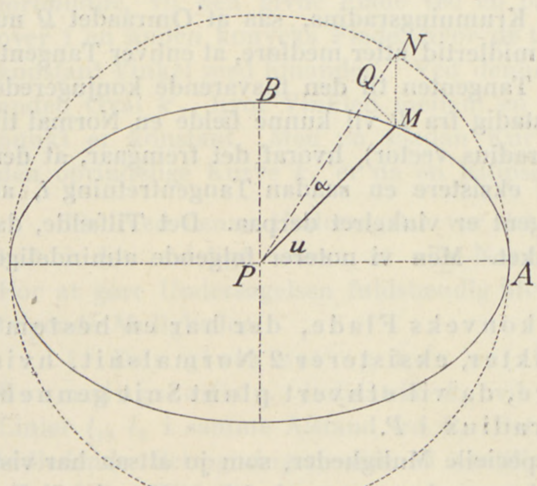

Fig. 6.

Lad $PA = \rho_1$ og $PB = \rho_2$ være Halvakserne i Flexionsellipsen (Fig. 6), og lad PM være en Halvdiameter, som danner Vinklen u med PA. Vi tegner en Cirkel med Centrum P og Radius PA og lader paa velkendt Maade denne Cirkel svare til Ellipsen i et ret Perspektiv. Til Punktet M paa Ellipsen svarer N paa Cirklen. Den til Tangentretningen PM svarende Flexionsradius er $f = PM$, og Krumningsradien i det tilsvarende Normalsnit bliver

$$\rho = \frac{f}{\cos \alpha},$$

hvor α er Vinklen mellem PM og PN, saa at Linien $MQ \perp PM$ straks afskærer Stykket $\rho = PQ$ af PN. Samtidig ses, at den til PM konjugerede Tangent staar vinkelret paa PN.

Rigtigheden af disse Konstruktioner følger af de foregaaende Undersøgelser. Cirklen og Ellipsen giver nemlig umiddelbart ved den angivne Affinitet den Sammenhæng, der er mellem tilsvarende Tangentretninger paa Fladen og i den sfæriske Afbildning, saaledes at en Halvdiameter PM i Ellipsen betragtet som Tangentretning paa Fladen svarer til en Tangentretning i den sfæriske Afbildning, som angives ved den tilsvarende Diameter PN i Cirklen. Dette ses nemlig at være rigtigt, naar PM specielt vælges paa PA eller PB, og saa maa det jo ogsaa gælde for andre Stillinger.

V. Ukonvekse Fladepunkter.

19. Naar der paa en given Normflade inden for enhver Omegn af Fladepunktet P findes andre Fællespunkter for Fladen og Tangentplanen Π i P end selve dette Punkt, kaldes Punktet et ukonvekst Fladepunkt. Et indre Punkt Q, forskelligt fra P, som er fælles for Fladen og Π, maa altid være et indre Punkt af en sammenhængende Bue β, som ligger baade i Fladen og i Π; da Fladen nemlig er en Normflade, kan Π ikke berøre Fladen i Q, og der maa derfor i Omegnen af Q opstaa en Skæringskurve β med modsat rettede Halvtangenter i Q. Kurven β kan ikke indeholde noget Dobbeltpunkt; thi heraf vilde følge, at Planen Π havde en lukket Kurve fælles med Fladen, og denne Kurve vilde da begrænse et Fladestykke, inden for hvilket der maatte være et Punkt, hvis Afstand fra Π var Maximum, og i dette Punkt vilde Tangentplanen være parallel med Π,[1]) hvilket er udelukket, da Fladen er en Normflade.

Af denne Betragtning fremgaar det, at alle fælles Punkter for Planen Π og Fladen, maa udfylde en Samling af Kurvebuer, hvoraf enhver er uden Dobbeltpunkter, og som enten forbinder P med et Punkt paa Fladestykkets Randkurve eller forbinder 2 Punkter af denne Randkurve uden at indeholde P. De fra P udgaaende Kurvegrene kan ikke træffe sammen uden for P, da dette nemlig vilde medføre Eksistensen af en lukket Skæringskurve, hvilket som ovenfor vist atter vilde føre til, at der fandtes et fra P forskelligt Punkt, hvis Tangentplan var parallel med Π. Kurvebuerne kan kun forekomme i endeligt Antal, da en Fortætning af Buerne vilde frembringe nye Punkter, hvor Tangentplanen var parallel med Π. Altsaa: Det er muligt omkring P at afgrænse et saadant Omraade Ω paa Fladen, at Tangentplanen Π skærer dette Omraade i et endeligt Antal indbyrdes adskilte Kurvebuer, der udgaar fra P og forbinder dette Punkt med Punkter af Omraadets Begrænsning. Ved disse Buer deles Ω i et Antal Fladestykker, som afvekslende ligger paa den ene og paa den anden Side af Π (i modsat Fald vilde der nemlig opstaa nye Berøringspunkter for Π), og som derfor maa forekomme i et lige Antal, og Antallet af Kurvebuer, der jo maa være det samme som Antallet af Fladestykker, er derfor ogsaa et lige Tal. Vi skal om et Øjeblik se, at den Om-

[1]) Beviset herfor behøver man ikke at opholde sig længe ved; da Fladen i Omegnen af Punktet ligger helt paa den ene Side af Planen gennem Punktet parallel med Π, maa alle Tangenter i Punktet ligge i den nævnte Plan.

stændighed, at Fladen er en Normflade, nødvendigvis maa medføre, at Antallet af Kurvebuer altid vil være 4.

For det første véd vi, at der, paa Grund af den projektive Forbindelse mellem tilsvarende Tangenter til Fladen og den sfæriske Afbildning, i P højst kan forekomme 2 Tangenter, hvis tilsvarende Normalsnit har uendelig stor Krumningsradius, med mindre alle Normalsnit i Punktet havde denne Egenskab; det sidste Tilfælde ser vi foreløbig bort fra. Paa den anden Side maa enhver Grænsestilling for en Halvlinie PQ, der udgaar fra P og indeholder et mod P konvergerende fælles Punkt Q for Fladen og Tangentplanen Π i P nødvendigvis bestemme et Normalsnit med uendelig stor Krumningsradius, fordi Normalsnittet gennem Linien PQ maa indeholde et Punkt R mellem P og Q, hvis Tangent er parallel med PQ, og Fladenormalerne i P og R er da begge vinkelrette paa PQ, hvoraf man slutter, at Grænsestillingen for PQ og den tilsvarende Retning i den sfæriske Afbildning maa være vinkelrette paa hinanden. Herved kan man da indse, at hver af de Kurvegrene, som udgaar fra P som Skæringskurver mellem Fladen og Tangentplanen Π i P har en bestemt Halvtangent i P, samt at Antallet af de indbyrdes forskellige Halvtangenter til de nævnte Kurvegrene i P maa være højst 4.

20. To forskellige af de nævnte Kurvegrene k_1 og k_2 (Fig. 7) kan ikke have samme Halvtangent i P, thi dette vilde medføre, at den til en vilkaarlig Tangentretning t i P hørende konjugerede Kurve paa Fladen i P vilde tangere k_1 og k_2. Drages nemlig en Linie r parallel med t og beliggende i Tangentplanen Π saaledes, at den skærer Kurvegrenene k_1 og k_2 i 2 Punkter, henholdsvis Q og R, da vil en Plan gennem $r \perp \Pi$ skære Fladen i en Bue QR, som indeholder et Punkt S (mellem Q og R), hvor Tangenten er parallel med r, altsaa ogsaa parallel med t; og idet r konvergerer mod t, vil S konvergere mod P samtidig med, at Halvlinien PS' (S' er Projektionen af S paa Π) stadig er beliggende mellem Halvlinierne PQ og PR; dersom de sidstnævnte Halvlinier altsaa konvergerer mod samme Grænsestilling, vil PS', og dermed PS, ogsaa konvergere mod denne Stilling. Der skulde saaledes være uendelig mange Tangentretninger t i P, som alle har konjugerede Kurver med een og samme Tangent i P. Men da Fladen er en Normflade, vil dette være udelukket.

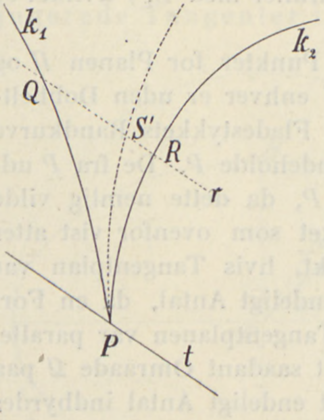

Fig. 7.

21. To Kurvegrene k_1 og k_2 med forskellige Halvtangenter t_1 og t_2 i P kan ikke udgøre den fuldstændige Skæringskurve mellem Tangentplanen og Fladen. Heraf vilde nemlig følge, at ethvert Normalsnit, hvis Plan skiller t_1 og t_2 og dermed ogsaa k_1 og k_2 (i Omegnen af P), vilde skære Fladen i en Kurve med Vendepunkt i P, altsaa (da Krumningsradius i et Normalsnit ikke kan blive Nul, naar der er Tale om en Normflade) i en Kurve med uendelig stor Krumningsradius, men dette er udelukket.

22. Tilbage staar saa kun den Mulighed, at hele Skæringskurven mellem Π og Fladen i en passende Omegn af P bestaar af 4 fra P udgaaende Grene, der to og to har modsat rettede Halvtangenter i P, og som saaledes tilsammen kan siges at udgøre 2 Kurvegrene, der hver for sig er overalt ordinær (d. e. i ethvert indre Punkt har 2 bestemte modsat rettede Halvtangenter) og har kontinuert varierende Tangent. De to Kurvegrene krydser hinanden i P, saa at den samlede Skæringskurve kan siges at have et Dobbeltpunkt i P.

Altsaa: Tangentplanen i et ukonvekst Punkt P af en Normflade skærer (i hvert Fald i en passende Omegn af P) Fladen i 2 ordinære Kurvegrene, der krydser hinanden i P.

Tangenterne til de 2 Kurvegrene i P kaldes Hovedtangenterne til Fladen i dette Punkt. I ethvert ukonvekst Punkt af en Normflade findes der altsaa 2 forskellige Hovedtangenter.

23. Vi har imidlertid en lille Undersøgelse tilbage, som gaar ud paa at vise, at vore Resultater ikke vil blive underkastet nogen Indskrænkning ved det Forbehold vi tog straks, nemlig det, at det betragtede Fladepunkt ikke har lutter Normalsnit med uendelig stor Krumningsradius. At dette Tilfælde i Virkeligheden ikke kan forekomme, naar Talen er om Normflader, ses derved, at man ikke for enhver Tangentretning t i P kan have Tangenten til den konjugerede Kurve i P sammenfaldende med t. Man kan nemlig lægge en Snitplan Π_1 parallel med Π og tage den mindst mulige Afstand fra P til den fremkomne Skæringskurve mellem Π_1 og Fladen; det hertil hørende Punkt af denne Skæringskurve vil give os en Tangent, der ved Grænseovergang fra Π_1 til Π leder til en Tangentretning t, der er vinkelret paa Tangenten til den til t svarende konjugerede Kurve.

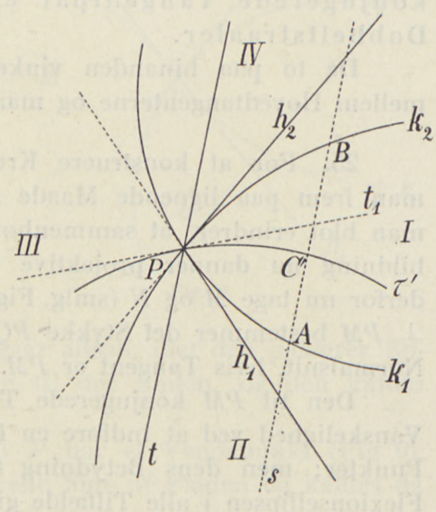

Fig. 8.

24. Vi gaar nu over til at undersøge, hvilken Forbindelse der paa en vilkaarlig Normflade i et ukonvekst Punkt P vil blive mellem en given Tangentretning t og Tangenten til den hertil konjugerede Kurve i samme Punkt (Fig. 8). t forudsættes forskellig fra Hovedtangenterne. Tangentplanen Π antages sammenfaldende med Tegneplanen og skærer Fladen i Kurverne k_1 og k_2. Vi lægger en Plan $\perp$ Π og parallel med t; den har Sporet s og skæres af Kurverne k_1 og k_2 i A og B (for hver Kurve vil vi kun have nødig at betragte eet

Skæringspunkt, naar s tages tilstrækkelig nær ved t). Den nævnte Plan skærer Fladen i en Bue AB, paa hvilken vi vælger et Punkt C med størst mulig Afstand h fra Π. C projiceres paa Tegneplanen i C'.

Tangenten til Buen AB i C er parallel med s, altsaa ogsaa med t, og Tangentplanen i C er da ogsaa parallel med t; C hører altsaa med til den konjugerede Kurve τ til Retningen t. Lader man s konvergere mod t, vil Linien PC ved Grænseovergangen give Tangenten til τ. Da Skæringskurven ACB i Følge 13 maa have ligelig kontinuert varierende Krumning, saa at de to Størrelser

$$\frac{AC'^2}{C'C} \text{ og } \frac{BC'^2}{C'C}$$

maa konvergere mod den samme Grænseværdi, nemlig Krumningsradius til Normalsnittet gennem t, og da denne Grænseværdi saaledes hverken er 0 eller ∞, saa bliver

$$\lim \frac{AC'}{BC'} = 1,$$

d. v. s. den rette Linie PC' nærmer sig en saadan Grænsestilling t_1, som bliver harmonisk forbundet med t med Hensyn til Grænsestillingerne for PA og PB, d. e. med Hensyn til Hovedtangenterne h_1 og h_2.

Tangenterne t og t_1 kaldes konjugerede; den angivne Afhængighed er reciprok.

Altsaa: I et ukonvekst Fladepunkt paa en Normflade danner de konjugerede Tangentpar en Involution med Hovedtangenterne til Dobbeltstraaler.

De to hinanden vinkelrette konjugerede Tangenter halverer Vinklerne mellem Hovedtangenterne og maa ligge paa Flexionsellipsens Hovedakser.

25. For at konstruere Krumningsradierne i de forskellige Normalsnit gaar man frem paa lignende Maade som tidligere ved de konvekse Punkter (18), idet man blot erindrer, at sammenhørende Tangenter paa Fladen og i den sfæriske Afbildning nu danner projektive Bundter med modsat Omløbsretning. Man maa derfor nu tage M og N (smlg. Fig. 6) paa modsat Side af Aksen PA, hvorefter $MQ \perp PM$ bestemmer det Stykke PQ, som angiver Længden af Krumningsradius i det Normalsnit, hvis Tangent er PM.

Den til PM konjugerede Tangentretning er $\perp PN$. Der er naturligvis ingen Vanskelighed ved at indføre en Indicatrix paa lignende Maade som ved de konvexe Punkter; men dens Betydning for Konstruktioner er kun ringe. Man vil se, at Flexionsellipsen i alle Tilfælde giver simplere Konstruktioner.

26. Den Kurve τ, der er konjugeret med en given Tangentretning t er overalt ordinær (d. e. har overalt modsat rettede Halvtangenter), og saa længe t ikke er Hovedtangent, vil den ikke kunne falde sammen med Tangenten til nævnte Kurve τ.

En Cylinderflade med τ til Ledekurve og t til Frembringerretning vil da nødvendigvis have samme Tangentplan som den givne Flade i ethvert Punkt af τ, alt under Forudsætning af, at man ikke træffer paa et Punkt, hvor Cylinderens Frembringer er Hovedtangent til Fladen. Af Fig. 8 fremgaar det jo, at Kurven τ tillige ligger paa den ene Side af Tangentplanen Π i hvert Fald i Omegnen af P, og dette vil betyde, at den omtalte Cylinder (den omskrevne Cylinder i Retningen t) er konveks i Omegnen af den paagældende Frembringer[1]). Ved Projektion af Fladen i Retningen t vil Cylinderens Spor i Projektionsplanen afgive den Kurve, som kaldes Fladens Kontur eller Projektion paa denne Plan. Vi kan altsaa opstille følgende Sætning:

Naar der paa en Normflade ikke findes nogen Hovedtangent, som er parallel med en vis Tangentretning t, da vil Fladens Projektion i denne Retning ind paa en Plan begrænses af en simpel Kurve uden Vendepunkter eller Spidser.

Da Normfladen ikke har 2 Punkter med indbyrdes parallele Tangentplaner, vil den nævnte Kurve være en konveks Bue, hvis Totalkrumning er mindre end π.

27. Vi gaar nu over til at undersøge Hovedtangenterne h_1 og h_2 og deres Beliggenhedsforhold til Fladen. Man kan altid ved en lukket Kurve paa Fladen afgrænse et saadant Fladestykke, at dette ved Tangentplanen Π i P deles i 4 adskilte Dele, som afvekslende falder paa den ene og den anden Side af Tangentplanen. I Fig. 8 (S. 21) er Π sammenfaldende med Tegneplanen, og de 4 Fladestykkers Projektion paa denne begrænses af de to Kurvegrene k_1 og k_2, hvori Tangentplanen skærer Fladen; disse Kurvers Tangenter i P er de to Hovedtangenter h_1 og h_2. De 4 Dele er betegnet med I, II, III, IV; I og III ligger f. Eks. over Tegneplanen, medens II og IV ligger under den. Det er da klart, at den punkterede Del af h_1 skjules af Fladen, medens den fuldt optrukne Del af h_1 ligger paa den synlige Side af Fladen. Tangenten h_1 gaar altsaa, idet den passerer Røringspunktet P, over fra den ene Side af Fladen til den anden, og den kaldes derfor ogsaa en Vendetangent til Fladen.

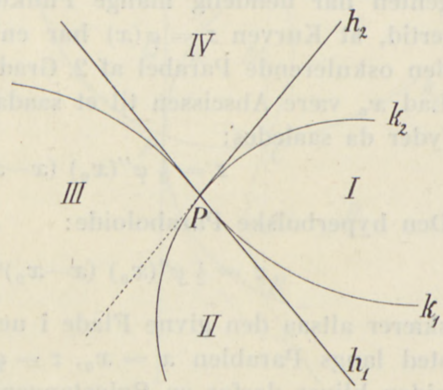

Fig. 9.

Anderledes gaar det, naar Kurvegrenen k_1 i P har et Vendepunkt (Fig. 9). Saa ligger Tangenten h_1 til k_1 i P helt paa den ene Side af Fladen og kaldes da en Støttetangent.

[1]) Vi bygger her paa den almindelige Sætning, at en ordinær Kurve uden Vendepunkter er en simpel Kurve (se Forf.s Afhandl. Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle. Oversigten 1911).

28. Foruden disse 2 Tilfælde kan der endnu indtræffe det Tilfælde, hvor en Hovedtangent er en Bølgetangent, d. e. den har uendelig mange Punkter, men ikke noget sammenhængende Stykke, fælles med Fladen i Omegnen af Røringspunktet, som da siges at være et Bølgepunkt.

Endelig maa det nævnes som en Mulighed, at Hovedtangenten helt eller delvis kan ligge paa Fladen, idet en af Kurvegrenene k_1 eller k_2 kan blive retlinet, i hvert Fald i Omegnen af P.

Med Hensyn til Muligheden for Bølgepunkters og Bølgetangenters Forekomst skal vi oplyse gennem et Eksempel, at der gives Normflader, som er overalt tæt opfyldt af Bølgepunkter.

Vi vælger en Translationsflade med Ligningen

$$z = \varphi(x) - \tfrac{1}{2} y^2,$$

hvor $\varphi(x)$ er 2 Gange differentiabel og saaledes bestemt, at $\varphi''(x)$ bliver en positiv, kontinuert Funktion, som i det betragtede Interval har en overalt tæt Mængde Maxima og Minima. Kurven $z = \varphi(x)$ i XZ-Planen bliver da en konveks Bue, som i hvert Punkt har en bestemt oskulerende Parabel af 2. Grad med Akseretning z. Nu maa Kurven $z = \varphi'(x)$ have en overalt tæt Mængde af Vendepunkter, og som Følge deraf en overalt tæt Mængde af Bølgepunkter[1]), d. e. Punkter hvor Tangenten har uendelig mange Punkter fælles med Kurven. Heraf slutter man imidlertid, at Kurven $z = \varphi(x)$ har en overalt tæt liggende Mængde af Punkter, hvor den oskulerende Parabel af 2. Grad har uendelig mange Punkter fælles med Kurven. Lad x_0 være Abscissen til et saadant Punkt. Ligningen for Parablen i XZ-Planen lyder da saaledes:

$$z = \tfrac{1}{2} \varphi''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \varphi'(x_0)\,(x-x_0) + \varphi(x_0).$$

Den hyperbolske Paraboloide:

$$z = \tfrac{1}{2} \varphi''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \varphi'(x_0)\,(x-x_0) + \varphi(x_0) - \tfrac{1}{2} y^2$$

skærer altsaa den givne Flade i uendelig mange Parabler, som har et Fortætningssted langs Parablen $x = x_0$, $z = \varphi(x_0) - \frac{1}{2} y^2$, og enhver ret Linie paa Paraboloiden bliver derfor en Bølgetangent til den valgte Translationsflade. Vi har altsaa konstrueret en overalt ukonveks Flade, som indeholder en overalt tæt Mængde Punkter, hvis Hovedtangenter alle er Bølgetangenter. Og dog er den her forelagte Flade en Normflade. Man konstaterer dette ved at benytte de med XZ- og YZ-Planen parallele plane Snit som Frembringerkurver. I den sfæriske Afbildning vil disse svare til Storcirkelbuer, idet man langs de nævnte plane Snit kan lægge omskrevne Cylinderflader, hvis Frembringere er parallele med henholdsvis YZ- og XZ-Planen, og det ses straks at den sfæriske Afbildning bliver en-entydig, da ingen af Kurverne $z = \varphi(x)$, $z = -\frac{1}{2} y^2$ (i henholdsvis XZ- og YZ-Planen) har 2 parallele Tan-

[1]) Se Forf.s Afhandl.: Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle (Oversigten 1911) S. 481.

genter. Da endvidere de nævnte omskrevne Cylinderflader let ses at have overalt bestemt kontinuert varierende Krumning ($\neq$ 0 og ∞), saa at ogsaa Flexionerne langs de 2 Kurverækker er bestemt og kontinuert varierende samt forskellige fra 0 og ∞, er det hermed fuldstændig godtgjort, at Fladen opfylder alle de til en Normflade stillede Betingelser.

29. Vi gaar nu over til at undersøge Fladens Parallelprojektion i det Tilfælde, hvor der i et Punkt P af Fladen findes en Hovedtangent t, som er Sestraale, idet vi foreløbig forudsætter, at der ikke findes noget andet Punkt paa Fladen, som frembyder denne Egenskab. Vi tilføjer, at vi efter sidstnævnte Forbehold paa Forhaand har udelukket det Tilfælde, hvor Fladen indeholder et ret Liniestykke i Sestraalernes Retning. Der bliver derefter 3 Hovedtilfælde at undersøge:

1. Hovedtangenten *t* er en Vendetangent.

I Fig. 10 forudsættes som tidligere, at Tangentplanen Π i P falder i Tegneplanen. Dens Skæringskurve med Fladen har Grenene k_1 og k_2, og t antages at være Tangent til den første af disse. Da t skal være en Vendetangent til Fladen, maa Kurven k_1 i Omegnen af P ligge paa samme Side af t. Da t er konjugeret med sig selv, véd man, at Tangenten i P til den Kurve r paa Fladen, som er konjugeret med Retningen t maa falde sammen med t. Paa den nævnte Kurve r lader sig nu afgrænse to Buer PM og PN, som i P har modsat rettede Halvtangenter, saaledes at en vilkaarlig Plan Γ, som lægges parallel med t og $\perp$ Π, ikke skærer nogen af Buerne PM og PN i mere end eet Punkt; var der nemlig 2 Skæringspunkter S og T f. Eks. med Buen PM, saa vilde der paa den Bue ST, som derved afgrænses paa Buen PM, være mindst eet Punkt U, i hvilket Tangenten u til Kurven r var parallel med Γ; da nu imidlertid en ret Linie u_1, som gaar gennem U og er parallel med t, ligger i Tangentplanen til Punktet U (fordi U ligger paa Kurven r), og da denne Tangentplan, i hvert Fald for en tilstrækkelig lille Omegn af P ikke kan falde sammen med Γ, som jo var $\perp$ Π, saa maatte altsaa u_1 og u falde sammen, d. v. s. u vilde være Tangent til Kurven r og samtidig være parallel med t, hvilket maatte medføre, at den var en Hovedtangent, hvilket strider imod den Forudsætning vi gjorde, at der ikke var andre Punkter end P, hvor en Hovedtangent var Sestraale.

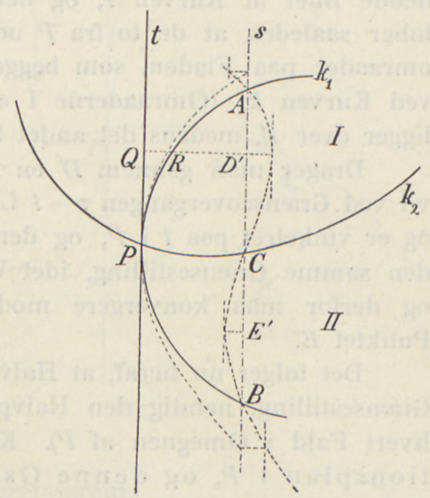

Fig. 10.

Efter at have indset Rigtigheden af den nævnte Paastand angaaende de to fra P udgaaende Buer PM og PN paa Kurven r, fortsætter vi Undersøgelsen af denne

Kurve saaledes: En ret Linie s parallel med t lægges saaledes, at den skærer k_1, og naar Afstanden fra t vælges under en vis passende Grænse, vil man kunne opnaa, at enhver dertil svarende Stilling af s skærer k_1 i 2 og kun 2 Punkter, medens den skærer k_2 i et enkelt Punkt. Flere Skæringspunkter kan der ikke blive Tale om; ellers maatte nemlig en Plan Γ, som lægges gennem s vinkelret paa Π skære Fladen i en Kurve, der havde mere end 3 Punkter fælles med s, og paa denne Kurve maatte der da være mere end 2 Punkter, hvis Tangenter var parallele med s, og altsaa ogsaa parallele med t, og Planen Γ vilde da skære r i mere end 2 Punkter (hvor lille man end valgte Omegnen om P); men dette strider imod, hvad ovenfor er godtgjort.

Da nu altsaa Skæringskurven mellem Planen Γ og Fladen indeholder 2 Punkter A og B af k_1 og et Punkt C af k_2, og da Buerne AC og CB af nævnte Skæringskurve indeholder mindst 2 Punkter (hver eet) D og E (disse Punkter er paa Figuren fremstillede ved deres Projektioner D' og E' paa Tegneplanen), hvis Tangenter er parallele med t, og som altsaa hører med til Kurven r, saa ses det, at disse Punkter D og E ved Grænseovergangen $s \to t$ maa gennemløbe to i P sammenstødende Buer af Kurven r, og det ses da tillige, at Kurven r i Omegnen af P forløber saaledes, at de to fra P udgaaende Buer af Kurven falder i saadanne Naboomraader paa Fladen, som begge begrænses af Kurven k_1 og skilles fra hinanden ved Kurven k_2 (Omraaderne I og II paa Figuren). Det ene af disse Omraader I ligger over Π, medens det andet falder under Π.

Drager man gennem D' en Linie $D'Q \perp t$ og skærer denne Linie k_1 i R, saa vil ved Grænseovergangen $s \to t$ Linien RD konvergere mod en Linie, der ligger i Π og er vinkelret paa t i P, og den rette Linie QD vil da samtidig konvergere mod den samme Grænsestilling, idet Vinklen RQD er mindre end Nabovinklen til QRD og derfor maa konvergere mod Nul. En ganske lignende Betragtning gælder Punktet E.

Det følger nu heraf, at Halvplanerne $t(D)$ og $t(E)$ konvergerer mod en fælles Grænsestilling, nemlig den Halvplan i Π, som begrænses af t og indeholder k_1 (i hvert Fald i Omegnen af P). Kurven r har altsaa en bestemt Oskulationsplan i P, og denne Oskulationsplan falder sammen med Π; den deler Kurven i Omegnen af P i to adskilte Dele. Fremdeles har de to fra P udgaaende modsat rettede Grene af r fælles Oskulationshalvplan; denne Oskulationshalvplan indeholder Kurven k_1 (i hvert Fald i Omegnen af P).

Heraf ser man, at den Cylinderflade, som har Ledekurve r og Frembringerretning t, har samme Tangentplan som Fladen i P (ligesom i de øvrige Punkter af r), samt at Fladens Parallelprojektion i Retningen t ind paa en vilkaarlig Plan vil faa en Spids af første Art i Projektionen af P; Halvtangenten i denne Spids bliver Sporet for den nævnte Oskulationshalvplan.

Den nævnte Cylinderflade, den om Fladen omskrevne Cylinderflade med Frembringerretning t, faar en Skæringskurve méd Fladen, som i Omegnen af P projiceres paa Tegneplanen i Mellemrummene mellem t og k_1, og som derfor berører t og k_1 i P. Dette ses umiddelbart af Figuren, idet den Kurve $ADCEB$, hvori Planen gennem $s \perp \Pi$ skærer Fladen, er tegnet i Nedlægning i Tegneplanen, og Tangenterne i D og E skærer Kurven i 2 Punkter af den søgte Kurve.

Cylinderfladens Røringskurve r og dens Skæringskurve med Fladen vil altsaa mødes i P og have samme Tangent i dette Punkt.

2. Tangenten *t* er en Støttetangent.

Dette Tilfælde behandles paa ganske lignende Maade som det foregaaende, og det er derfor unødvendigt at gaa ind paa Enkelthederne. Vi nøjes med at henvise til Fig. 11, hvor Projektionen r' af den omskrevne Cylinders Røringskurve r med Fladen er tegnet. Kurven r forløber her i Fladedelene I og III og har 2 modsat rettede Oskulationshalvplaner, hvilke tilsammen udgør Fladens Tangentplan Π. De to fra P udgaaende modsat rettede Buer paa r ligger nu paa samme Side af Π.

Parallelprojektionen af Fladen i Retningen t ind paa en Plan vil efter dette frembyde et simpelt Konvekspunkt i det til P svarende Punkt, og Tangenten til Konturen bliver Sporet for Tangentplanen Π.

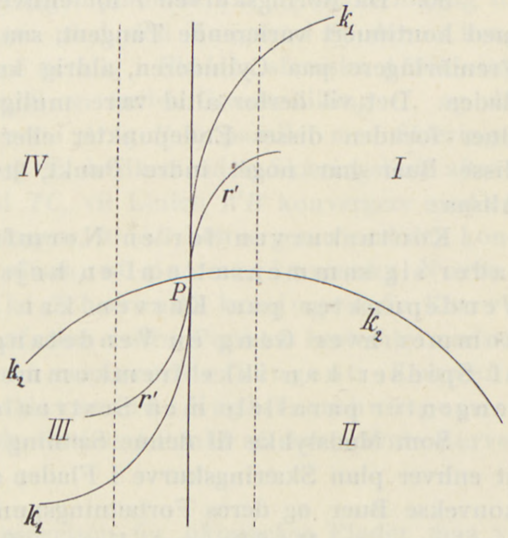

Fig. 11.

3. Tangenten *t* er en Bølgetangent.

Da t i dette Tilfælde i Omegnen af P har uendelig mange Punkter fælles med Fladen, altsaa ogsaa med k_1, vil k_1 i Omegnen af P indeholde uendelig mange Punkter hvis Afstande fra t, disse Afstande regnede med Fortegn, er Maksimumseller Minimumsværdier, idet der blandt disse Værdier findes uendelig mange positive og uendelig mange negative Værdier, eller i hvert Fald, hvis det ene Fortegn mangler, uendelig mange med det andet Fortegn samt uendelig mange med Værdien Nul. I de nævnte Punkter af k_1 er Tangenterne parallele med t, og Punkterne hører saaledes med til den Kurve r, der er konjugeret til Retningen t. Om denne Kurve r kan saa heraf drages den Slutning, at dens Projektion paa Planen Π maa indeholde uendelig mange Punkter, hvis Afstande fra t, disse Afstande regnede med

Fortegn, er Maksimums- eller Minimumsværdier. Men dette vil efter den under 1. ovenfor anstillede Betragtning medføre, at Tangenterne til r i disse Punkter er Hovedtangenter og parallele med t, saa at der i Omegnen af P vilde være uendelig mange Punkter, hvor en Hovedtangent var parallel med t, hvilket strider mod vore Forudsætninger. Altsaa:

Ved en Parallelprojektion, hvor højst et endeligt Antal Hovedtangenter er Sestraaler, opstaar der som Kontur for Normfladen en Kurve uden Vendepunkter, som er sammensat af et endeligt Antal konvekse Buer. Paa denne Kurve findes en Spids, hver Gang en Vendetangent til Fladen er Sestraale. Konturens Tangenter er Spor for Fladens Tangentplaner i de tilsvarende Punkter.

30. Da Røringskurven r for enhver omskreven Cylinder er en ordinær Kurve med kontinuert varierende Tangent, saa kan de Tangenter til denne Kurve, som er Frembringere paa Cylinderen, aldrig komme til at ligge overalt tæt paa Cylinderfladen. Det vil derfor altid være muligt at inddele r i en højst aftællelig Mængde Buer foruden disses Endepunkter eller Fortætningspunkter, saaledes at ingen af disse Buer har noget indre Punkt, hvis Tangent er Frembringer i Cylinderen. Altsaa:

Konturkurven for en Normflade i en hvilken som helst Retning lader sig sammensætte af en højst aftællelig Mængde konvekse Buer. Vendepunkter paa Kurven kan aldrig forefindes. En Spids fremkommer hver Gang en Vendetangent er Sestraale, og en Ophobning af Spidser kan ikke fremkomme uden ved en Ophobning af Hovedtangenter parallele med Sestraaleretningen.

Som Modstykke til denne Sætning erindrer vi om det tidligere fundne Resultat, at enhver plan Skæringskurve i Fladen er sammensat af en højst aftællelig Mængde konvekse Buer og deres Fortætningspunkter og Endepunkter; Vendepunkt opstaar kun, naar en Vendetangent ligger i Snitplanen, og Ophobning af Vendepunkter finder kun Sted ved en Ophobning af Hovedtangenter i Snitplanen.

Ved vore Undersøgelser over Normfladens Projektion har vi indskrænket os til Betragtning af Parallelprojektion; det vil imidlertid, som vi skal se, være meget let at udvide vore Sætninger til almindelig Centralprojektion.

VI. Omskrevne Keglefladers.

31. En Kegleflade siges at være omskreven om en Flade, naar alle dens Frembringere er Tangenter til denne. Skal Keglefladen bestemmes saaledes, at den faar et givet Toppunkt T, vil det altsaa komme an paa at drage Tangenter til Fladen gennem dette Punkt. Røringspunkterne for disse Tangenter vil nu, naar den givne Flade er en Normflade, vise sig at danne en Kurve (den til T hørende

konjugerede Kurve). Det Tilfælde, da T er uendelig fjernt, er undersøgt i det foregaaende. Vi betragter nu det almindelige Tilfælde, hvor T er et Punkt i endelig Afstand.

32. De konvekse Flader behandles let; har man nemlig en gennem T gaaende Tangent med Røringspunkt P, kan man ved en Plan gennem T afgrænse en Kalot paa Fladen, som indeholder Punktet P, og det er da klart, at alle de Halvlinier, som udgaar fra T og skærer eller rører denne Kalot, udfylder et konvekst konisk Rum, hvis ikke-plane Begrænsning straks vil give den søgte Kegleflade. Alle Røringspunkterne for denne Kegles Frembringere udgør en sammenhængende Kurve, (den til T konjugerede Kurve inden for den omtalte Kalot), som deler Kalotten i to adskilte Dele. Naar 2 Punkter A og B af denne Kurve nærmer sig til en fælles Grænsestilling C, vil Skæringslinien mellem Tangentplanerne i A og B nærme sig til Linien TC, og Linien AB vil da konvergere mod den Tangent i C, der er konjugeret til TC; de to Punkter A og B svarer nemlig i Fladens sfæriske Afbildning til to Punkter A' og B', der konvergerer mod en fælles Grænsestilling C', og da Skæringslinien mellem Fladens Tangentplaner i A og B er parallel med Skæringslinien mellem Kuglens Tangentplaner i A' og B', hvilken sidste Skæringslinie altsaa maa konvergere mod en Linie parallel med TC, vil Linien $A'B'$ konvergere mod en Tangent til Kuglen $\perp$ TC, hvoraf netop fremgaar, at AB konvergerer mod den konjugerede Tangent til TC. Herved ses det altsaa, at paa en konveks Normflade vil den til et vilkaarligt Punkt T hørende konjugerede Kurve være ordinær (d. e. den har i ethvert af sine indre Punkter bestemte modsat rettede Halvtangenter) og have kontinuert varierende Tangent. Kurvens Tangenter er konjugerede med de tilsvarende Keglefrembringere.

At Keglefladen berører den givne Flade i ethvert Punkt af den nævnte Kurve, er derefter umiddelbart indlysende.

33. For at kunne gennemføre Undersøgelsen for ukonvekse Flader maa vi forudskikke følgende

Hjælpesætning: Naar 2 Punkter Q_1 og Q_2 paa Fladen konvergerer mod en fælles Grænsestilling P saaledes, at Linien Q_1Q_2 konvergerer mod en Tangent t i P, der ikke er Hovedtangent til Fladen, da maa Skæringslinien mellem Tangentplanerne i Q_1 og Q_2 konvergere mod en Grænsestilling, der gaar gennem P.

I modsat Fald var det nemlig muligt at lade Q_1 og Q_2 gennemløbe saadanne Fundamentalrækker, at den nævnte Skæringslinie fik en Grænsestilling s, der ikke gik gennem P, og dette vilde medføre, at Skæringskurven mellem Fladen og en Plan Γ lagt gennem Q_1 og Q_2 og $\perp$ Tangentplanen Π i P vilde have saadanne Tangenter i Q_1 og Q_2, at deres Skæringspunkt S ved Grænseovergangen ikke konvergerede mod P. Da nu Diametren $2R$ i $\triangle$ Q_1Q_2S's omskrevne Cirkel kan udtrykkes ved:

$$2R = \frac{Q_1 S}{\sin(Q_1 Q_2 S)},$$

og da Tælleren i denne Brøk ikke konvergerer mod Nul, medens Nævneren gør det, vil $2R$ vokse i det uendelige.

Dette vilde imidlertid betyde, at den omtalte plane Kurves Normaler i Q_1 og Q_2 vilde skære hinanden i et Punkt, der ved Grænseovergangen fjerner sig i det uendelige, og dette vilde altsaa medføre, at et Normalsnit gennem Grænsestillingen t for $Q_1 Q_2$ i P vilde have uendelig stor Krumningsradius, men dette er umuligt, naar t ikke er Hovedtangent. Derved er Hjælpesætningen altsaa bevist.

Den Grænsestilling, hvortil Skæringslinien mellem Tangentplanerne nærmer sig, maa saa naturligvis være den til t konjugerede Tangent i Punktet P.

34. Lad os nu antage, at Punktet T (forskelligt fra P) er givet saaledes, at TP er Tangent med Røringspunkt P, men ikke nogen Hovedtangent (Fig. 12). Vi søger den omskrevne Kegle med Toppunktet T. Gennem t drages en Linie, der skærer Kurverne k_1 og k_2 (de fra det foregaaende kendte Betegnelser) i A og B. En Plan Γ lægges gennem AB vinkelret paa Tangentplanen i P. Γ skærer Fladen i en Bue AB, til hvilken man, naar A og B er beliggende inden for en passende Omegn af P, kan drage en Tangent TQ fra T (med Røringspunkt Q); og det kan vises, at man — stadig under Forudsætning af, at man betragter et passende lille Fladeomraade om P — kan gaa ud fra, at der ikke kan drages mere end een Tangent fra T. Hvis der nemlig var 2 Tangenter, med Røringspunkter Q_1 og Q_2 paa Buen AB, da vilde man ved Grænseovergang til P faa den rette Linie $Q_1 Q_2$ til at gaa mod Grænsestillingen TP, medens Tangentplanerne i Q_1 og Q_2 maatte skære hinanden i en Linie, der stadig gaar gennem T, og hvis Grænsestilling derfor ogsaa maatte gaa gennem T, og som Følge deraf (efter Hjælpesætningen ovenfor) falde sammen med TP. Men dette er umuligt, da TP ikke er nogen Hovedtangent.

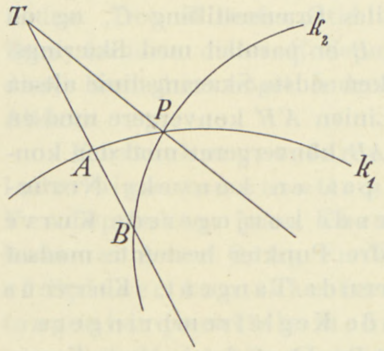

Fig. 12.

Man kan altsaa altid afgrænse et saadant Fladeomraade omkring P, at der under Grænseovergangen inden for dette Omraade ikke fra T kan drages mere end een Tangent til Buen AB. Røringspunktet Q_1 for denne Tangent vil nu ved Grænseovergangen mod P gennemløbe en Jordanbue, saaledes at Halvlinien PQ_1 konvergerer mod en Grænsestilling, der er harmonisk forbundet med TP med Hensyn til Hovedtangenterne i P. Dette vises paa ganske lignende Maade som i det specielle Tilfælde, hvor T er uendelig fjernt (24).

Af denne Betragtning fremgaar det, at naar Punktet T ikke ligger paa nogen Hovedtangent, vil den til T konjugerede Kurve paa Fladen i ethvert af sine Punkter P have en bestemt Tangent med modsat rettede Halvtangenter, og denne Tangent er konjugeret med den rette Linie PT.

Den omskrevne Kegle med T som Toppunkt bestemmes ved den omtalte Kurve som Ledekurve, og man ser da umiddelbart, at Keglen har samme Tangentplan som Fladen i ethvert Punkt af denne Kurve.

35. Vi gaar derefter over til at betragte det Tilfælde, hvor T ligger paa en Hovedtangent t med Røringspunkt P uden at være beliggende paa Fladen. Tangentplanen Π i P antages som tidligere sammenfaldende med Tegneplanen (Fig. 13). Den skærer Fladen i Kurvegrenene k_1 og k_2. Tangenten til k_1 i P er den nævnte Hovedtangent t; den antages foreløbig at være en Vendetangent.

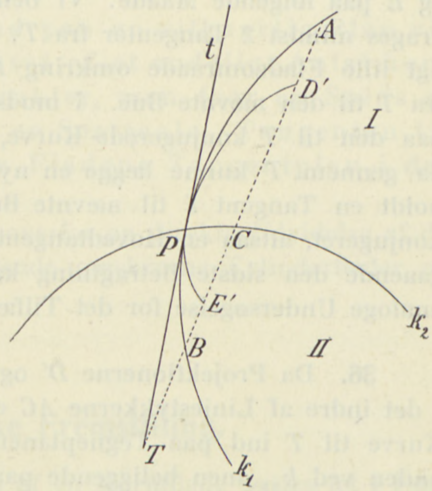

Fig. 13.

Forudsætter man nu, at der foruden P kun findes højst et endeligt Antal Fladepunkter, der sender en Hovedtangent igennem T, vil det være muligt omkring P at afgrænse et saadant Fladeomraade, at der inden for dette ikke findes noget andet Punkt end P, der sender en Hovedtangent gennem P. Og vi indskrænker da vore Betragtninger til et saadant Omraade.

Gennem T drages en Linie, der skærer k_1 i A og B, k_2 i C, og gennem denne Linie lægges en Plan $\Gamma \perp \Pi$; denne Plan skærer Fladen i en Bue ACB, til hvilken man kan drage mindst 2 Tangenter fra T, een med Røringspunkt D paa Buen AC, og en anden med Røringspunkt E paa Buen CB. Naar den rette Linie TAB konvergerer mod t, vil D og E konvergere mod P. Efter det foregaaende véd man nu, at den konjugerede Kurve til T i Punktet D har en Tangent (med modsat rettede Halvtangenter), der er konjugeret med TD, og det tilsvarende gælder om Punktet E. Da konjugerede Linier i et Punkt varierer saaledes paa Fladen, at naar Punktet varierer kontinuert, og den ene Linie gennem Punktet ligesaa, vil den anden ogsaa variere kontinuert, følger allerede heraf, at ved Grænseovergangen mod P vil Tangenterne til den til T hørende konjugerede Kurve i D og E konvergere mod t, saa at t maa være Tangent til den konjugerede Kurve i P. Men vi kan komme videre i Undersøgelsen af denne Kurve i Omegnen af P. Vælger vi 2 aldeles vilkaarlige Punkter Q og R paa Kurven i Omegnen af P og lader vi dem konvergere mod P paa vilkaarlig Maade, blot Punkterne stadig er forskellige og stadig ligger paa den betragtede Kurve, kan det bevises, at Punkternes Forbindelseslinie QR i alle Tilfælde maa konvergere mod t. Dette følger i Virkeligheden straks af den tidligere beviste Hjælpesætning (33); i Følge denne har man nemlig, at dersom Linien QR havde en Grænsestilling t', forskellig fra t, da maatte Tangentplanerne i Q og R (hvilke Tangentplaner jo stadig gaar gennem T) skære hinanden i en Linie, hvis Grænsestilling maatte gaa gennem P; sidstnævnte Grænsestilling skulde tillige gaa gennem T, altsaa falde sammen med t, men den skulde ogsaa være konjugeret med t', hvilket altsaa vilde føre til en Modsigelse.

Vi har altsaa bevist, at ingen Grænsestilling for Linien QR kan være forskellig fra t. I Omegnen af P maa derfor den til T konjugerede Kurve udgøre en sammenhængende Bue, bestaaende af to fra P udgaaende Jordanbuer med Tangenten t og modsat rettede Halvtangenter i P.

Vi kan nu endvidere supplere Undersøgelsen ovenfor angaaende Punkterne D og E paa følgende Maade: Vi bemærkede, at der til Buen ACB i Planen Γ kunde drages mindst 2 Tangenter fra T; vi kan her tilføje, at der inden for et tilstrækkeligt lille Fladeomraade omkring P ikke kan være Tale om flere end 2 Tangenter fra T til den nævnte Bue. I modsat Fald maatte nemlig Planen Γ afskære en Bue paa den til T konjugerede Kurve, en Bue, som ikke indeholdt P, og man maatte da gennem T kunne lægge en ny Plan Γ' som var vinkelret paa Π og som indeholdt en Tangent t' til nævnte Bue, forskellig fra t. Men t' maatte da blive selvkonjugeret, altsaa en Hovedtangent gaaende gennem T, hvilket var udelukket. (Angaaende den sidste Betragtning kan man sammenligne den tidligere gennemførte analoge Undersøgelse for det Tilfælde da T er uendelig fjernt (29)).

36. Da Projektionerne D' og E' af Punkterne D og E paa Π (se Fig. 13) ligger i det indre af Liniestykkerne AC og BC, ses det, at Projektionen af den konjugerede Kurve til T ind paa Tegneplanen bestaar af 2 Buer PD' og PE' adskilte fra hinanden ved k_2, men beliggende paa samme Side af k_1 (naar t stadig forudsættes at være en Vendetangent). Kurven DPE forløber altsaa i de to Fladedele I og II. Ligesom tidligere (29) viser man derefter, at Kurven i P har en bestemt Oskulationshalvplan, nemlig den Halvplan, der begrænses af t og indeholder Kurven k_1 (i hvert Fald i Omegnen af P), og at Oskulationsplanen, der falder sammen med Fladens Tangentplan Π, deler Kurven i Omegnen af P i de to adskilte Buer PD og PE, een paa hver Side af Planen.

Betydningen heraf for den omskrevne Kegleflade med Toppunkt T er indlysende: Keglen har langs t en skarp Kant, idet 2 Dele af Keglen mødes i Frembringeren t, saaledes at de har fælles Tangenthalvplan og ligger paa modsat Side af denne.

Er t en Støttetangent, bliver Resultaterne noget anderledes: Buerne PD' og PE' ligger paa modsat Side af k_1 og Kurven DPE krydser altsaa k_1 paa Fladen, samtidig med, at den berører den i P. Kurven har nu to modsatte Oskulationshalvplaner i P, og Oskulationsplanen, der naturligvis fremdeles falder sammen med Fladens Tangentplan Π, vil have Kurven liggende paa samme Side af Planen i Omegnen af P.

Er endelig t en Bølgetangent, kan vi ved et lignende Ræsonnement som det vi tidligere anvendte i det specielle Tilfælde, hvor T er uendelig fjernt, indse, at der gennem T gaar uendelig mange Hovedtangenter med Ophobning i t.

Vore Resultater kan altsaa sammenfattes i følgende Sætning:

Naar der fra et Punkt T, som ikke ligger paa Fladen, højst udgaar et endeligt Antal rette Linier, der er Hovedtangenter for et endeligt Antal Punkter paa Fladen, vil den omskrevne Kegleflade med T som Toppunkt røre Fladen i ethvert Punkt af den til T konjugerede Kurve. Keglefladen vil være uden Singulariteter (overalt konveks) langs de Frembringere der ikke er Vendetangenter; langs de Keglefrembringere, der er Vendetangenter, vil der derimod dannes en skarp Kant.

Fladens Centralprojektion fra T ind paa en vilkaarlig Plan vil begrænses af en Kurve, der er sammensat af et endeligt Antal konvekse Buer. Kurven har ingen Vendepunkter, men faar en Spids af første Art, hver Gang en Vendetangent er Sestraale. Tangenten til Konturen er i alle Tilfælde Sporet for Fladens Tangentplan i det tilsvarende Punkt.

Som man ser, staar vi nu i Virkeligheden overfor en direkte Udvidelse af de Resultater, som vi tidligere har udledet angaaende omskrevne Cylinderflader og Konturdannelse ved Parallelprojektion.

VII. Normfladers analytiske Fremstilling.

37. Den i det foregaaende givne Definition af en Normflade sættes let i Forbindelse med den sædvanlige analytiske Parameterfremstilling. Naar en Flade i et retvinklet Koordinatsystem xyz fremstilles ved Ligninger af Formen

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

har man 2 Kurvesystemer (Frembringerkurver) paa Fladen, eftersom man sætter u eller v lig en Konstant. Saafremt disse Kurvesystemer, i hvert Fald inden for tilstrækkelig smaa Omraader omkring hvert Punkt, opfylder de i 1 nævnte Betingelser, vil Fladen inden for det betragtede Omraade være et simpelt Fladestykke. Saafremt yderligere de i 9 nævnte Betingelser er til Stede, har vi med en Normflade at gøre, og de i det foregaaende angivne Resultater vil da kunne komme til Anvendelse paa den forelagte Flade.

38. For at alle disse Betingelser skal være til Stede, vil det være tilstrækkeligt, at

1) alle Differentialkvotienter af 2den Orden af Funktionerne $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ eksisterer og er kontinuerte Funktioner af (u, v).

2) De kendte Differentialformer for Fladen:

$$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2,$$
$$D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2,$$

er overalt forskellige fra Nul, altsaa

$$EG - F^2 \neq 0, \quad DD'' - D'^2 \neq 0.$$

Heraf følger nemlig for det første, at man ikke kan have $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ samtidig, og analogt for den anden Parameter v, samt at man heller ikke kan have

$$\frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v},$$

hvorved man indser, at hver af Parameterkurverne har modsat rettede Halvtangenter, og at de to Parameterkurver, der udgaar fra Punktet (u, v) ikke kan have samme Tangent. At Parameterkurverne inden for tilstrækkelig snævre Omraader er uden Dobbeltpunkter, følger af, at Tangenten varierer kontinuert. At 2 Parameterkurver af modsat Art inden for et tilstrækkeligt lille Fladeomraade højst har eet Punkt fælles, følger deraf, at man ellers maatte have et Punkt P paa Fladen, i Nærheden af hvilket 2 Parameterkurver havde 2 Skæringspunkter, saaledes, at man ved en Grænseovergang kunde faa Parameterkurverne til at røre hinanden i P, idet de to Skæringspunkter samtidig kunde konvergere mod P.

Af disse Betragtninger følger, at Fladen i Omegnen af ethvert af sine Punkter er en simpel Flade.

Dernæst kan man vise, at Betingelsen

$$DD'' - D'^2 \neq 0$$

udelukker Ophobning af Punktpar med indbyrdes parallele Tangentplaner i Omegnen af samme Punkt P paa Fladen. En saadan Ophobning maatte nemlig medføre, at der i P eksisterede en Retning $du : dv$, for hvilken Differentialerne af Normalens Retningscoss. X, Y, Z var Nul, altsaa:

$$1) \text{ enten } \frac{\partial X}{\partial u} : \frac{\partial Y}{\partial u} : \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial v} : \frac{\partial Y}{\partial v} : \frac{\partial Z}{\partial v}$$

$$2) \text{ eller } \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial u} = 0$$

eller de analoge Ligninger for Parameteren v.

Men disse Betingelser vilde i alle Tilfælde medføre

$$DD'' = D'^2.$$

Endelig ses det, at de til Fladens Frembringerkurver svarende Kurver i den sfæriske Afbildning opfylder de i 1 nævnte Betingelser (inden for tilstrækkelig smaa Fladeomraader). De sfæriske Billeder af Parameterkurverne fremstilles nemlig ved

$$x = X,\ y = Y,\ z = Z,$$

for henholdsvis u og v lig en Konstant, og da $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u}$ ikke samtidig kan være Nul, lige saa lidt som $\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v}$ kan være det, ses det at de nævnte sfæriske Kurver maa have overalt modsat rettede kontinuert varierende Halvtangenter.

At Fladen har en bestemt Flexion langs hver Frembringerkurve, ses ved, at man opskriver Udtrykket for Flexionen. For Parameterkurven v = konst. har man Flexionen f_u bestemt ved:

$$f_u{}^2 = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2};$$

da nu $DD''—D'^2 \neq 0$, kan Tælleren i dette Udtryk ikke blive 0, og da $EG—F^2 \neq 0$, kan Nævneren heller ikke blive 0, saa at f_u hverken kan blive 0 eller ∞. Herved ses det da, at Fladen under de nævnte Betingelser inden for tilstrækkelig smaa Omraader er en Normflade.

39. Har man omvendt opgivet en Normflade, vil man altid kunne finde en saadan analytisk Fremstilling af Fladen, at ovennævnte Betingelser er opfyldt. Man vælger et retvinklet Koordinatsystem xyz, hvor z-Aksen ikke er parallel med nogen Tangentplan til Fladen, og hvor ingen af Hovedtangenterne er parallele med xz-Planen eller med yz-Planen, hvilken sidste Betingelse paa Grund af Hovedtangenternes kontinuerte Variation i hvert Fald altid kan opfyldes inden for tilstrækkelig smaa Fladeomraader. I dette Koordinatsystem vil det betragtede Fladeomraade kunne fremstilles ved en Ligning af Formen $z = f(x, y)$, og plane Snit parallele med xz-Planen og yz-Planen kan benyttes som Frembringerkurver; da disse har kontinuert varierende Krumning ($\neq \infty$), ses det straks, at $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ og $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ er endelige, bestemte, kontinuert varierende Funktioner af (x, y). Endvidere kan man bevise, at det samme vil gælde om

$$s = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x};$$

lad nemlig P og P_1 være to Punkter paa en af Frembringerkurverne, f. Eks. paa en Kurve beliggende i en Plan parallel med yz-Planen, og lad Tangentplanerne i disse Punkter være henholdsvis Π og Π_1. Lader man P_1 konvergere mod P, vil Retningen PP_1 gaa mod Tangenten t til Frembringerkurven i P, medens samtidig Skæringslinien mellem Π og Π_1 konvergerer mod den Retning, der bestemmes ved den konjugerede Tangent t_1 til t. Vi betegner den forsvindende Vinkel mellem Π og Π_1 ved ω, medens de forsvindende Vinkler mellem de 2 Planers Spor i henholdsvis yz- og xz-Planen betegnes med henholdsvis α og β; Buelængden PP_1 paa Frembringerkurven betegnes med σ. Da nu $\frac{\omega}{\sigma}$ gaar mod en endelig bestemt Grænseværdi ($\neq 0$), og da $\frac{\alpha}{\sigma}$ ligeledes gaar mod en endelig bestemt Grænseværdi (Frembringerkurvens Krumning i P), som ogsaa er forskellig fra Nul, saa maa $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\omega}$ ogsaa gaa mod en endelig bestemt Grænseværdi $\neq 0$. Lægger man nu gennem P 2 Planer Π' og Π'_1 parallele med Π og Π_1, da vil disse nye Planer danne Rumvinklen ω med hinanden, og denne Rumvinkel skæres af yz-Planen i en Vinkel α, af xz-Planen i en Vinkel β, medens Rumvinklens Kant konvergerer mod t_1 (som efter vore Forudsætninger ikke kan være parallel med yz-Planen). Da nu $\frac{\alpha}{\omega}$ gaar mod en endelig bestemt Grænseværdi ($\neq 0$), ses det gennem en simpel elementær-stereometrisk Betragtning, at ogsaa $\frac{\beta}{\omega}$ gaar mod en endelig bestemt Grænseværdi, og det samme maa da gælde om $\frac{\beta}{\sigma}$, og herved ses det umiddelbart, at Differentialkvotienten

$$s = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

eksisterer, samt at den, da baade Flexionerne og de konjugerede Tangenter varierer kontinuert med P, ogsaa varierer kontinuert med P.

At Retningskoefficienten a for Hovedtangenternes Projektion paa xy-Planen bestemmes ved Ligningen

$$r + 2sa + ta^2 = 0,$$

vises derefter let; og naar denne Ligning overalt skal have reelle Rødder, maa man have

$$rt - s^2 < 0.$$

VIII. Regulære Fladestykker.

40. Som regulære Fladestykker vil vi betegne saadanne, som henhører under en af følgende 5 Typer:

A. Udfoldelige konvekse Fladestykker, som har en bestemt Flexion ($\neq 0$ og ∞) langs en Kurve, som skærer alle de retlinede Frembringere, og som følgelig — hvad vi ikke her vil opholde os nærmere ved — har bestemte Flexioner i alle Retninger. Fremstillingen af Krumningsforholdene i Analogi med de foregaaende Udviklinger vil ikke frembyde nogen Vanskelighed.

B. Konvekse Normflader.

C. Den dobbelt-vindskæve Flade, d. e. den vindskæve Hyperboloide eller Paraboloide.

D. Vindskæve regulære Flader, d. e. vindskæve Normflader, som gennem hvert af sine Punkter har gaaende een og kun een retlinet Frembringer, medens den Hovedtangent, som ikke falder sammen med denne Frembringer, kun har eet Punkt fælles med Fladen.

E. Almindelige ukonvekse Normflader, hvor hver Hovedtangent kun har eet Punkt fælles med Fladen.

41. Vi vil nu navnlig undersøge de to sidste Typer, hvorved vi begynder med den sidste, almindelige Type, idet den anden da saa godt som uden videre kommer med som et specielt Tilfælde.

For at have en kort Betegnelse for den nævnte Fladetype, bruger vi i det følgende ligefrem Bogstavbetegnelsen i ovenstaaende Liste, idet vi taler om E-Flader.

En E-Flade indeholder ingen ret Linie. Fladen kan i et passende valgt retvinklet Koordinatsystem fremstilles ved en Ligning af Formen $z = f(x, y)$, hvor $f(x, y)$ har bestemte kontinuert varierende partielle Differentialkvotienter af 2. Orden:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

og hvor tillige $rt < s^2$. Vi betragter paa Fladen et indre Stykke, hvis Projektion paa xy-Planen er et konvekst (afsluttet) Omraade Ω. De følgende Bemærkninger angaar nu stadig det saaledes afgrænsede Fladestykke.

Projektionerne af Hovedtangentkurverne[1]) fremstilles ved Differentialligningen

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;$$

her er stadig $rt < s^2$, og Integralkurverne bliver da Kurver med bestemt kontinuert varierende Tangent og uden Spidser. De to Systemer betegnes som Hovedtangentkurver af 1ste henholdsvis 2den Art. To Hovedtangentkurver af samme Art har intet Punkt fælles, og to Hovedtangentkurver af modsat Art har højst eet Punkt fælles. Det sidste følger deraf, at man i Tilfælde af, at der eksisterede 2 fælles Punkter kunde variere den ene Kurve saaledes, at den kom til at berøre den anden, men dette er umuligt, da ovennævnte Differentialligning stadig maa give ulige store Værdier af $\frac{dy}{dx}$.

[1]) d. v. s. Kurver, hvis Tangenter alle er Hovedtangenter.

Ingen Hovedtangentkurve kan være lukket; ellers vilde den skæres af Hovedtangentkurver af den anden Art i mere end eet Punkt.

42. Hver Hovedtangent deles af sit Røringspunkt P i 2 Halv-Hovedtangenter, „een paa hver Side af Fladen"; Betydningen af sidstnævnte Udtryk fastlægges nøjagtig ved Valg af en positiv Retning paa en bestemt Fladenormal, og ved kontinuert Variation af denne med det tilhørende Punkt paa Fladen fastlægges paa denne Maade en positiv Normal for ethvert Punkt af Fladen. Dersom der nu paa en Halv-Hovedtangent i Punktet P findes et Punkt P_1 saaledes, at hvert Punkt af Liniestykket PP_1 ligger paa en positiv Halvnormal til Fladen, siger man at vedkommende Halvtangent ligger paa den positive Side af Fladen, i modsat Fald paa den negative Side. Lad nu p og q være 2 Halv-Hovedtangenter med Røringspunkter P og Q, og lad os antage, at de hører til Hovedtangentkurver af samme Art. Hvis det da er muligt ved kontinuert Variation paa Fladen at bringe P over i Q, samtidig med at Halvtangenten p, der under Variationen stadig skal vedblive at være Halv-Hovedtangent, kommer over i q, saa maa p og q ligge paa samme Side af Fladen; i modsat Fald vilde man nemlig kunne afsætte en konstant Længde ε paa den variable Halvlinie ud fra dennes Endepunkt saaledes, at det andet Endepunkt af denne Længde ved Overgangen fra p til q vilde gaa fra den ene Side af Fladen over paa den anden. Og da dette skulde gælde for en vilkaarlig lille Værdi ε, maatte der altsaa findes en Halv-Hovedtangent, som foruden sit Berøringspunkt havde endnu et Punkt fælles med Fladen, hvilket strider imod Forudsætningen.

43. Af denne lille Undersøgelse vil man nu kunne slutte, at der ikke paa Fladen kan findes nogen plan Kurve k, der frembyder et Ophobningspunkt R for Vendepunkter. I vilkaarlig Nærhed af R vilde der nemlig paa k altid kunne findes 2 Vendepunkter P og Q (Fig. 14), hvor Halvtangenterne p og q, svarende til et bestemt Omløb paa Kurven, dannede en Vinkel ε med hinanden, som altid kunde bringes under en vilkaarlig opgiven positiv Værdi, medens disse Halvtangenter dog samtidig var beliggende paa forskellig Side af k, altsaa ogsaa paa modsat Side af Fladen. Dette er imidlertid efter ovenstaaende Undersøgelse umuligt. Og den Betragtning, vi her har anstillet, kan, som man straks ser, føres endnu et Skridt videre, idet man kan opstille følgende Resultat: Naar en plan Bue k paa en E-Flade varierer kontinuert paa Fladen, saaledes, at dens Plan aldrig er Tangentplan eller konvergerer mod en

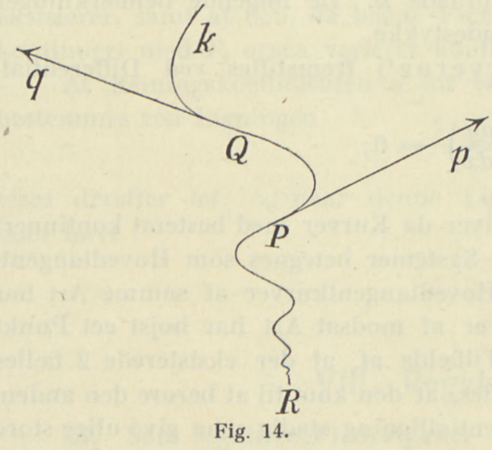

Fig. 14.

saadan, og naar k indeholder 2 variable Vendepunkter, da kan disse aldrig under Variationen konvergere mod en fælles Grænsestilling; og heraf følger da den vigtige Sætning:

Hver Tangentplan skærer Omegnen om Røringspunktet P i to gennem P gaaende konvekse Buer.

Var der nemlig et Vendepunkt paa en af de Buer, hvori Tangentplanen skærer Omegnen om P, f. Eks. paa Buen k_1 i Punktet P, saa vilde det være muligt at lade et Normalsnit i P variere saaledes, at det indeholdt 2 Vendepunkter, der begge konvergerede mod P, idet vedkommende Normalsnit kunde lægges gennem en Tangent, der foruden P endnu havde 2 paa modsat Side af P beliggende Punkter fælles med k_1, og som under Opretholdelse heraf konvergerede mod Tangenten til k_1 i P. Men dette er, som vi saa, uforeneligt med, at Fladen er en E-Flade.

Altsaa:

Paa en E-Flade er enhver Hovedtangent en Vendetangent.

44. Det er samtidig klart, at Fladen i en passende Omegn af P højst har 3 Punkter fælles med en ret Linie. Fandtes der nemlig 4 Skæringspunkter A, B, C, D med en ret Linie l, saa vilde en Plan gennem l parallel med Fladenormalen i P (for en passende Omegn om P) skære Fladen i en sammenhængende Kurve gennem A, B, C, D; men denne Kurve maatte jo saa have mindst 2 Vendepunkter paa Strækningen $ABCD$, og ved en Grænseovergang mod P vilde begge disse Vendepunkter konvergere mod P, hvilket er umuligt.

Vi har altsaa følgende Sætning:

Om hvert Punkt paa en E-Flade lader der sig afgrænse et Fladestykke, som ikke har mere end 3 Punkter fælles med nogen ret Linie.

Hele Fladen lader sig da naturligvis inddele i en aftællelig Mængde saadanne Fladestykker.

45. Vi gaar nu over til en nærmere Undersøgelse af Hovedtangentkurverne, og beviser først følgende Sætning:

Hovedtangentkurverne projiceres paa xy-Planen som overalt konvekse Kurver.

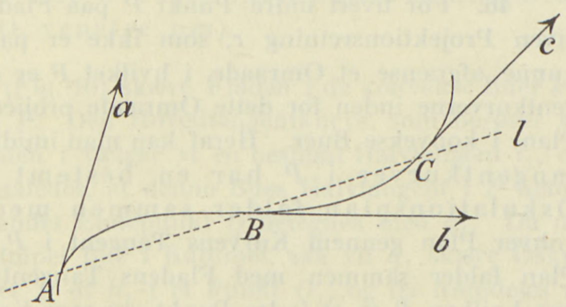

Fig. 15.

En sammenhængende Bue paa en Hovedtangentkurve vil nemlig projiceres paa xy-Planen i en Bue k, som af en vilkaarlig ret Linie l højst kan skæres i 2 Punkter. Var der nemlig 3 Skæringspunkter A, B, C (i denne Orden), saa vilde de til et vist Omløb paa Buen svarende fremadgaaende Halvtangenter a, b, c (Fig. 15) skiftevis ligge paa den ene og paa den anden Side af l (det Tilfælde, hvor l er Tangent i et af Punkterne, kan man aabenbart se bort fra, idet man i saa Fald kan variere l paa passende Maade). Hvis nu et Punkt P bevæger sig kontinuert paa Fladen saaledes, at dets Projektion paa xy-Planen gennemløber Linien l i Retningen ABC, saa vil ved denne Bevægelse en Halv-Hovedtangent i P efterhaanden passere Stillinger, hvis Projektioner paa xy-Planen er a, b, c; men den maa da ogsaa passere Stillinger, hvis Projektion falder paa l, een Gang for en Stilling af P, hvis Projektion falder mellem A og B, en anden Gang mellem B og C. Den plane Snitkurve i Fladen, hvis Projektion paa xy-Planen falder paa Linien l, vilde som Følge heraf faa Vendepunkter i de nævnte 2 Stillinger af P.

Fandtes der nu paa k et Vendepunkt, saa vilde man kunne variere l saaledes, at A, B, C, konvergerede mod samme Punkt, og de nævnte 2 Vendepunkter paa Snittet gennem l vilde da ogsaa konvergere mod samme Grænsestilling, men dette er umuligt (43). Altsaa er Hovedtangentkurvernes Projektioner overalt konvekse.

Idet vi stadig forudsætter, at den E-Flade, vi betragter, er projiceret paa xy-Planen i et konvekst endeligt Omraade Ω, kan vi tilføje følgende Bemærkninger:

Hver Hovedtangentkurves Projektion b paa xy-Planen udgør en konveks Bue, der forbinder 2 Randpunkter A, B af Ω med hinanden. Den maa nemlig sammen med den ene eller den anden af de to konvekse Buer AB, der hører med til Begrænsningen af Ω, udgøre et konvekst Omraade. Var begge Delomraaderne nemlig ukonvekse, maatte der nødvendigvis være et Vendepunkt paa b, hvilket er udelukket.

Altsaa:

Naar Projektionen af en E-Flade udfylder et konvekst endeligt Omraade Ω (saaledes at ingen Tangentplan er projicerende Plan), saa vil Projektionerne af Hovedtangentkurverne bestaa af konvekse Buer, hvoraf enhver forbinder 2 Punkter af Begrænsningen for Ω.

46. For hvert indre Punkt P paa Fladen vil man, svarende til en vilkaarlig given Projektionsretning r, som ikke er parallel med Fladens Tangentplan i P, kunne afgrænse et Omraade, i hvilket P er et indre Punkt, saaledes, at Hovedtangentkurverne inden for dette Omraade projiceres i Retningen r (paa en eller anden Plan) i konvekse Buer. Heraf kan man imidlertid slutte, at hver af de to Hovedtangentkurver i P har en bestemt Oskulationsplan, og at denne Oskulationsplan falder sammen med Fladens Tangentplan. Thi for enhver Plan gennem Kurvens Tangent i P, kan man — naar ikke netop denne Plan falder sammen med Fladens Tangentplan — afgrænse en Bue paa Kurven, paa hvilken P er et indre Punkt, og som ligger paa den ene Side af Planen; dette følger umiddelbart af ovenstaaende Bemærkning om Kurvens Projektion. Grænsestillingen for en Plan gennem Tangenten i P og et Punkt Q af Kurven, der konvergerer mod P, maa altsaa nødvendigvis falde sammen med Fladens Tangentplan i P, og herved er Sætningen bevist.

Ved Betragtning af en enkelt Projektion af Hovedtangentkurven følger da ogsaa Eksistensen af en bestemt Oskulationshalvplan, nemlig den, hvis Projektion indeholder Hovedtangentkurvens Projektion (i Omegnen af P).[1])

47. Vi tager nu den Omstændighed til Hjælp, at naar 2 Punkter P og Q af en Hovedtangentkurve konvergerer mod samme Grænsestilling R paa Kurven, saa vil Skæringslinien mellem Tangentplanerne i P og Q konvergere mod en bestemt Retning, nemlig Tangenten til Hovedtangentkurven i R; dette følger umiddelbart af, at denne Tangent er en Hovedtangent. Derved kan vi udlede en vigtig Egenskab ved Hovedtangentkurven. Vi danner en Retningskegle for Kurven, idet vi ud fra et bestemt vilkaarligt valgt Punkt drager Halvlinier parallele med de til et vist Omløb paa Kurven svarende Halvtangenter. Da Kurven i ethvert Punkt har en bestemt Oskulationshalvplan, følger heraf, at Retningskeglen langs hver Sidelinie har 2 modsat rettede Tangenthalvplaner, der tilsammen udgør en Tangentplan til Keglen, og denne Tangentplan til Retningskeglen er parallel med Oskulationsplanen til Hovedtangentkurven. Paa Grund af ovennævnte Egenskab angaaende konsekutive Oskulationsplaners Skæringslinie kan man derefter indse, at Retningskeglen har den Egenskab, at naar 2 af dens Sidelinier konvergerer mod samme Grænsestilling s, da vil Skæringslinien mellem Tangentplanerne langs disse Sidelinier ogsaa konvergere mod s; men dette maa betyde, at Keglen er konveks i Omegnen af s. Skærer man nemlig Keglen med en Plan, saaledes at der derved i Omegnen af s opstaar en endelig Bue, der kan benyttes som Ledekurve for Keglen, da kan denne intet Vendepunkt have; thi i et Vendepunkt finder altid en Ophobning Sted af Punktpar med parallele Tangenter, og dette vilde for Keglen betyde, at der var en Sidelinie, i Omegnen af hvilken der var en Ophobning af saadanne Tangentplaner, hvis Skæringslinie ikke konvergerede mod denne Sidelinie. Vi har altsaa følgende Sætning:

Hovedtangentkurverne paa en E-Flade er overalt simple Kurver[2]). Hver Hovedtangentkurve har overalt Snoning til samme Side (overalt højre om eller overalt venstre om).

48. Lad nu Tangentplanen i P (Fig. 16) skære Fladen i de konvekse Buer k_1, k_2, og lad t være Tangenten til k_1 i P. Den Hovedtangentkurve, som berører k_1 i P betegner vi med h_1. Paa Tangenten t vælger vi en bestemt Halvtangent t_1, og paa h_1 afsætter vi en lille Bue PQ saaledes, at denne Bues Halvtangent i P netop bliver t_1; Buens Halvtangent i det andet Endepunkt Q betegnes med q_1. Da nu h_1 (for PQ tilstrækkelig lille) er en simpel Bue i Rummet, saa vil q_1 skære Oskulationshalvplanen svarende til Punktet P af h_1 i et Punkt Q_1, og da fremdeles t_1 og q_1 ligger paa modsat Side af Fladen (t_1 er en fremadgaaende, q_1 en tilbage-

[1]) Angaaende Oskulationshalvplanen og dens Betydning se Forf.s *Darstellende Geometrie*, Leipzig 1914, S. 224.

[2]) Angaaende disse Kurver se Forf.s *Darstellende Geometrie*, S. 219—230.

gaaende Halvtangent til Kurven h_1), saa maa t_1 og Q_1 ligge paa modsat Side af Buen k_1, saaledes, at naar Q konvergerer mod P, da vil Q_1 beskrive en konveks Bue Q_1P (alt under Forudsætning af, at man betragter et tilstrækkeligt lille Omraade omkring P), som berører k_1 i P og ligger paa den konkave Side af k_1. Da nu Projektionen af h_1 paa Tangentplanen i P i Omegnen af P maa være en konveks Bue (med Projektionen af q_1 som Halvtangent), som ligger paa den konkave Side af Buen PQ_1, saa følger heraf ogsaa, at den nævnte Projektion ligger paa den konkave Side af k_1, d. e. Hovedtangentkurven h_1 ligger paa Fladen i Omegnen af P helt paa den ene Side af Kurven k_1; den ligger i de to af k_1 og k_2 begrænsede Fladedele I og II, som paa Fladen kan siges at udgøre den konkave Side af k_1.

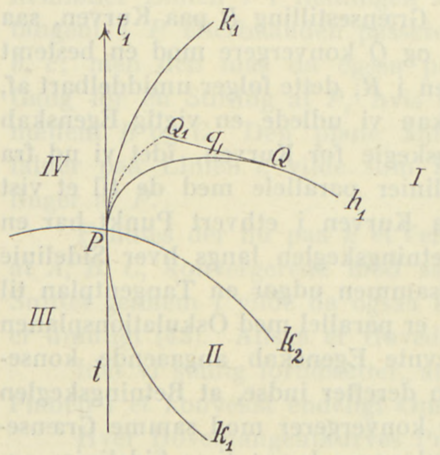

Fig. 16.

For den anden Hovedtangentkurve i P gælder naturligvis ganske lignende Betragtninger, og et Blik paa Figuren overbeviser os om, at de to Kurver har Snoning til modsat Side. Vi kan derfor betegne de to Systemer af Hovedtangentkurver som Højre- og Venstre-Kurver.

Den Enneper'ske Sætning, at Torsionen for de to Hovedtangentkurver i numerisk Værdi udtrykkes ved Kvadratroden af de to Hovedkrumningers Produkt, er efter vore Definitioner umiddelbart indlysende for E-Fladernes Vedkommende.

49. Endnu en Undersøgelse vil vi gennemføre for disse Flader: Vi betragter en omskreven Kegleflade mod Toppunkt i et Punkt P af Fladen, idet vi søger at faa Klarhed over dens Stilling til Fladen i Omegnen af P (Fig. 17). Betegnelserne er som i det foregaaende. Tangentplanen Π i P falder sammen med Tegneplanen. Et Normalsnit gennem P er projiceret paa Tegneplanen i PA og nedlagt i Tegneplanen i Buen PQ_1A. Denne Bue har sin Halvtangent i P gaaende gennem A, og som Følge deraf kan der fra P drages en Tangent med Røringspunkt Q mellem P og A[1]). Punktet Q er projiceret paa Tegneplanen i Q'. Efter vore Forudsætninger om Fladen er det sikkert, at der

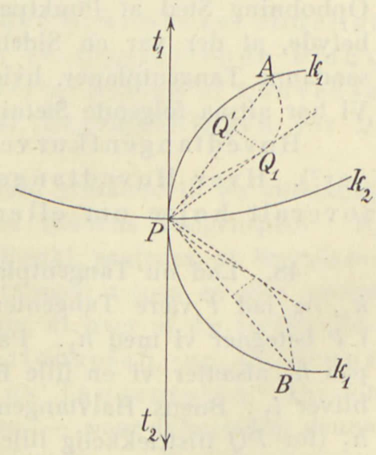

Fig. 17.

[1]) Smlgn. Forf.s Afhandling: *Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle,* Oversigt o. d. kgl. danske Vid. Selsk. Forh. 1911, No. 5, S. 456.

ikke paa Buen PA findes mere end eet indre Punkt Q, hvis Tangent gaar gennem P, i hvert Fald naar A tages inden for en passende Bue PM af k_1; Eksistensen af 2 Punkter Q vilde nemlig medføre Eksistensen af 2 Vendepunkter, og dette er umuligt inden for en passende Omegn om P. Lader man nu A konvergere mod P, idet det gennemløber en sammenhængende Bue paa k_1, vil Linien PQ gennemløbe en omskreven Kegle med Toppunkt P, og PQ konvergerer mod samme Grænsestilling som PA, altsaa mod t_1. t_1 regnes derfor med til den omskrevne Kegle. Langs t_1 faar Keglen en bestemt Tangenthalvplan, nemlig Grænsestillingen for Halvplanen $t_1(Q)$, hvilken aabenbart konvergerer mod den Halvplan, som begrænses af t_1 og indeholder k_1.

Tager man den anden Bue PB paa k_1 i Betragtning, faar man et lignende Resultat, idet man her faar et Keglenet, som støder op til den anden Halvtangent t_2. De to Keglenet og deres Forlængelser ud over P vil nu aabenbart tilsammen udgøre et sammenhængende fuldstændigt Keglenet, med en fuldstændig Tangentplan langs Hovedtangenten (t_1, t_2), idet denne Tangentplan falder sammen med Fladens Tangentplan i P. Røringskurven for denne Kegle bestaar af 2 Buer, der støder sammen i P, og har Halvtangenterne t_1 og t_2 i dette Punkt. Buerne ligger paa modsat Side af Tangentplanen, medens de paa Fladen ligger i Rummene I og II paa samme Side af Kurven k_1.

I Nærheden af den anden Hovedtangent faas en ganske lignende Keglenade.

Disse Resultater overføres meget let paa Konturbestemmelser.

50. Hvad Klassen D, de vindskæve Flader, angaar, kan vi nøjes med et Par Ord. Den ene Række af Hovedtangentkurver bliver her Fladens retlinede Frembringere, medens den anden Række vil frembyde ganske lignende Egenskaber som i det almindelige Tilfælde, hvor Fladen er en E-Flade.

IX. Analytiske Fremstillinger af E-Flader.

51. Naar vi benytter den i det foregaaende angivne Opstilling i et retvinklet Koordinatsystem, kan E-Fladen fremstilles ved en Ligning af Formen $z = f(x, y)$, hvor de partielle Differentialkvotienter af 2. Orden, r, s, t er kontinuerte og opfylder Betingelsen $rt - s^2 < 0$. Disse Betingelser er imidlertid ikke tilstrækkelige til at udtrykke, at Fladen er en E-Flade; der kræves tillige, at enhver Hovedtangent kun har eet Punkt fælles med Fladen. Denne geometriske Betingelse lader sig imidlertid ikke udtrykke ved nogen analytisk Betingelse, som udsiger noget om Eksistensen af visse Differentialkvotienter, eller ved Relationer eller Afhængigheder mellem eksisterende Differentialkvotienter af $f(x, y)$. Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse er simplest udtrykt i Definitionen selv, og vi skal ikke her beskæftige os med at udtrykke den anderledes. Derimod har det Interesse at faa opstillet nogle hyppig anvendelige tilstrækkelige Betingelser for at en Flade $z = f(x, y)$, hvor

$f(x, y)$ har højere Differentialkvotienter, skal være en E-Flade, i hvert Fald inden for passende Omraader. Og med saadanne Betingelser skal vi beskæftige os i det følgende.

52. Vi antager, at $z = f(x, y)$ har bestemte, endelige Differentialkvotienter af 3. Orden, og sætter:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = A, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = B, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = C, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = D.$$

Vi antager endvidere, at $rt - s^2 < 0$, og at de 2 Ligninger

$$r + 2s\alpha + t\alpha^2 = 0,$$
$$A + 3B\alpha + 3C\alpha^2 + D\alpha^3 = 0,$$

ikke for noget Værdipar (x, y) inden for det betragtede Omraade tilfredsstilles af samme Værdi af α. Den sidste Betingelse viser os, at hver Hovedtangent er en Vendetangent, hvad man straks paa bekendt Maade aflæser ved Hjælp af den Taylor'ske Sætning. Om Vendetangenten imidlertid har andre Punkter fælles med Fladen end Røringspunktet, véd vi foreløbig ikke.

53. Projektionerne af Hovedtangentkurverne paa xy-Planen er konvekse i ethvert Punkt; dette vil kunne vises ved lignende Betragtninger, som vi tidligere har anstillet (45), men det kan ogsaa udledes af Differentialligningen

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (1),$$

idet man ved Differentiation af denne faar:

$$A + 3B\frac{dy}{dx} + 3C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + D\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\left(s + t\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

og da nu efter vore Forudsætninger de to Ligninger

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$A + 3B\frac{dy}{dx} + 3C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + D\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

ikke samtidig kan være opfyldt, og da man fremdeles som Følge af Uligheden $rt - s^2 < 0$ ikke samtidig kan have

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$s + t\frac{dy}{dx} = 0,$$

saa ser man, at den ved (2) bestemte Værdi for $\frac{d^2y}{dx^2}$ stadig maa have samme Fortegn (Er $\frac{dy}{dx} = \infty$ indfører man den reciproke Værdi, og gennemfører den tilsvarende Betragtning). Det viser sig altsaa, at Projektionerne af Hovedtangentkurverne er overalt konvekse.

54. Vi betragter nu det til et vilkaarligt endeligt konvekst Omraade Ω i xy-Planen svarende Fladestykke. Hovedtangentkurvernes Projektioner paa xy-Planen vil da udgøre konvekse Buer, der forbinder hver 2 Punkter af Begrænsningen for Ω (Smlgn. 45). Projektionerne af Hovedtangentkurverne danner altsaa 2 Rækker af konvekse Buer, hvoraf enhver deler Ω i 2 adskilte Dele; to Buer af samme System har intet Punkt fælles; og to Buer af modsatte Systemer har højst eet Punkt fælles. En ret Linie l i xy-Planen berører højst 2 af disse Buer; man ser nemlig straks, at den ikke kan røre 2 Buer af samme System. En Plan gennem l og vinkelret paa xy-Planen skærer altsaa Fladen i en Kurve med højst 2 Vendepunkter, og denne Kurve har derfor højst 4 Punkter fælles med en ret Linie. Heraf følger da, at det betragtede Fladestykke højst har 4 Punkter fælles med en ret Linie. Desuden kan man indse, at der omkring hvert Punkt paa Fladen kan afgrænses et saadant Omraade, at man indenfor dette ikke kan finde Hovedtangenter af modsat Art, hvis Projektioner paa xy-Planen er sammenfaldende, og inden for det hertil svarende Omraade i xy-Planen vil der da ikke kunne findes nogen Fællestangent til 2 Hovedtangentkurvers Projektioner; et plant Snit i Fladestykket vinkelret paa xy-Planen har da højst eet Vendepunkt og ingen ret Linie skærer Fladestykket i mere end 3 Punkter.

Naar altsaa de her omtalte Betingelser er opfyldt, vil Fladen højst have 4 Punkter fælles med en ret Linie. Fladen er i Omegnen om hvert indre Punkt en E-Flade. Hovedtangentkurverne er simple Kurver; det ene System er Højrekurver, det andet Venstrekurver.

X. Sætningen om de 4 Krumninger.

55. Lad $y = f(x)$ være en 3 Gange differentiabel Funktion, og lad det være forudsat, at $f''(x) \gtreqless 0$, eftersom $x \gtreqless 0$, medens $f'''(0) \neq 0$. Kurven $y = f(x)$ har da i Punktet A med Abscissen $x = 0$ et Vendepunkt (Fig. 18). Der gælder da følgende **Hjælpesætning I.** Naar Tangenten i et Punkt B skærer Kurven paa ny i et Punkt C saaledes, at naar B konvergerer mod A, vil C ogsaa konvergere mod A, da vil

$$\left|\frac{AC}{AB}\right| \to 2.$$

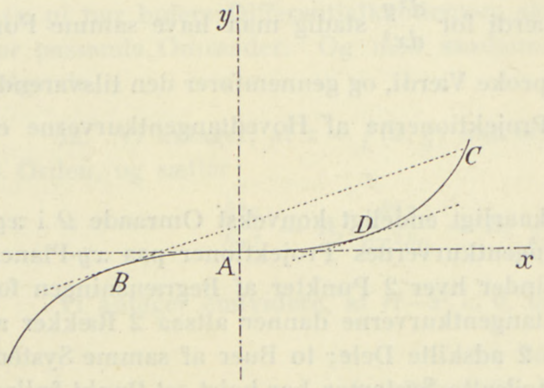

Fig. 18.

Det er her naturligvis ligegyldigt om man ved AB og AC forstaar Korder eller Buer.

For at bevise denne Sætning vil vi først indføre et Punkt D beliggende paa Buen AC, og hvis Tangent er parallel med Tangenten i B. Idet nu A, B, C, D har Abscisserne 0, x_1, x_2, x_3, har man:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x_1) = f'(x_3),$$

altsaa

$$\frac{(f'''(0)+\alpha)\frac{x_1^3}{6} - (f'''(0)+\beta)\frac{x_2^3}{6}}{x_1-x_2} = \frac{x_1^2}{2}(f'''(0)+\gamma) = \frac{x_3^2}{2}(f'''(0)+\delta),$$

hvor α, β, γ, δ konvergerer mod Nul samtidig med x_1 og x_2.

Den sidste Ligning giver

$$\frac{x_1^2}{x_3^2} \to 1,$$

altsaa, da x_1 og x_3 har modsat Fortegn:

$$\frac{x_1}{x_3} \to -1,$$

hvoraf følger (smlg. 58), at $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|$ til sidst er ≤ 1.

Dernæst faar man:

$$3x_1^2(x_1-x_2)(f'''(0)+\gamma) = (f'''(0)+\alpha)x_1^3 - (f'''(0)+\beta)x_2^3,$$

hvoraf, idet $\frac{x_1}{x_2} = \xi$

$$(\xi-1)^2(2\xi+1)f'''(0) = \alpha\xi^3 - \beta - 3\gamma\xi^2(\xi-1),$$

eller

$$\xi = -\tfrac{1}{2} + \frac{\alpha\xi^3 - \beta - 3\gamma\xi^2(\xi-1)}{2(\xi-1)^2 f'''(0)}$$

Da nu $-1 \leq \xi < 0$, følger heraf

$$\xi \to -\tfrac{1}{2},$$

altsaa

$$\frac{x_2}{x_1} \to -2,$$

og

$$\left|\frac{AC}{AB}\right| \to 2,$$

hvilket skulde bevises.

56. I Udtrykket ovenfor kan man sætte

$$\alpha = f'''(\theta_1 x_1) - f'''(0),$$
$$\beta = f'''(\theta_2 x_2) - f'''(0),$$
$$\gamma = f'''(\theta_3 x_1) - f'''(0),$$

hvor θ_1, θ_2, θ_3 er beliggende mellem 0 og 1. Dersom nu $f'''(x)$ for $-x_2 < x < x_2$ har den numeriske Svingningsgrænse m, har man altsaa

$$|\alpha| < m, \ |\beta| < m, \ |\gamma| < m, \text{ altsaa}$$

$$|\xi + \tfrac{1}{2}| < \frac{4m}{|f'''(0)|}$$

Herved kan man nu vise følgende

Hjælpesætning II. Naar $y = f(x, \lambda)$ er en kontinuert Funktion af Værdiparret (x, λ), er 3 Gange differentiabel med Hensyn til x, $\frac{d^3y}{dx^3}$ er en kontinuert Funktion af Parret (x, λ), og naar tillige for hver Værdi af λ, Kurven $y = f(x, \lambda)$ har et Vendepunkt i Punktet A_λ med Abscissen x_λ, hvor $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, da vil 2 Punkter B_λ og C_λ af Kurven, saaledes beliggende, at Tangenten i det første gaar gennem det andet, og som samtidig konvergerer mod en fælles Grænsestilling A_{λ_0}, som er Vendepunkt paa Kurven $f(x, \lambda_0) = 0$, variere saaledes, at

$$\left|\frac{A_\lambda C_\lambda}{A_\lambda B_\lambda}\right| \to 2.$$

Man faar nemlig, med letforstaaelige Betegnelser, efter Uligheden ovenfor:

$$|\xi_\lambda + \tfrac{1}{2}| < \frac{4m_\lambda}{|f'''(x_\lambda)|},$$

og da $f'''(x, \lambda)$ er kontinuert, vil m_λ konvergere mod 0, og

$$\xi_\lambda \to -\tfrac{1}{2},$$

hvoraf ovenstaaende Sætning følger.

57. Vi kan under de samme Forudsætninger angaaende Funktionen $y = f(x)$ udlede flere lignende Sætninger:

Hjælpesætning III a. Lad Tangenten i B skære Kurven paa ny i C og lad fra B være draget en ny Tangent med Røringspunkt D (Fig. 19). Naar nu B, C, D samtidig konvergerer mod Vendepunktet A paa Kurven, har man

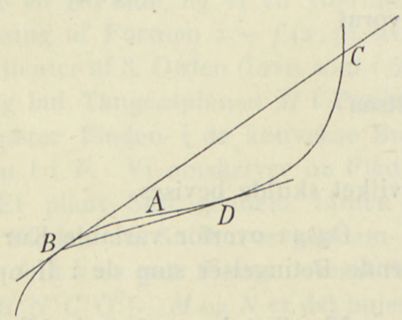

Fig. 19.

$$\frac{BC}{BD} \to 2.$$

Dette følger straks af Hjælpesætning I, idet

$$\frac{BA}{BD} \to \tfrac{2}{3},$$

$$\frac{BA}{BC} \to \tfrac{1}{3},$$

altsaa

$$\frac{BC}{BD} \to 2.$$

Hjælpesætning III b. Under lignende Betingelser som nævnt i Hjælpesætning II udvides III a til variable Kurver. Den herved erholdte Sætning betegnes som III b.

58. Hjælpesætning IV. Dersom Korden AB (Fig. 20) udgaar fra Vendepunktet A, og D er det Punkt paa Buen AB, hvis Tangent er parallel med Korden, da vil, naar $B \to A$

$$\frac{AD}{AB} \to \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

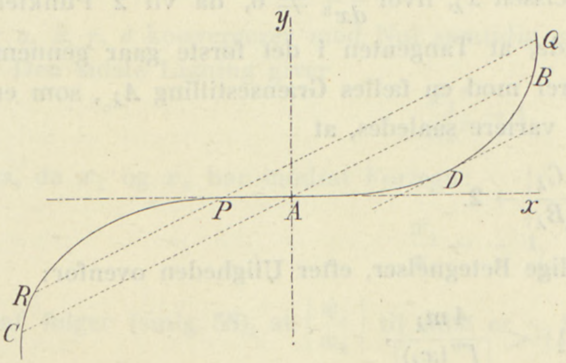

Fig. 20.

A vælges som før til Begyndelsespunkt, og B og D antages at have Abscisserne henholdsvis x_1 og x_2; man har da:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1},$$

eller, idet man anvender Taylor's Formel:

$$\frac{x_1 x_2^{\,2}}{1 \cdot 2}\,(f''(0) + \alpha) = \frac{x_1^{\,3}}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,(f'''(0) + \beta),$$

hvoraf

$$\frac{x_2^{\,2}}{x_1^{\,2}} \to \tfrac{1}{3},$$

altsaa

$$\frac{x_2}{x_1} \to \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

hvilket skulde bevises.

Ogsaa overfor variable Kurver lader Sætningen sig anvende under ganske lignende Betingelser som de i II opstillede.

59. Sætningen kan imidlertid udvides til følgende

Hjælpesætning V. Dersom Kurven i Omegnen af sit Vendepunkt A skæres af en ret Linie i Punkterne P, Q, R (Fig. 20), og denne Linie varierer saaledes, at P, Q, R konvergerer mod A, og $\frac{PQ}{RP} \rightarrow 1$, da vil det Punkt D paa Buen PQ, hvis Tangent er parallel med Linien, dele denne Bue saaledes, at

$$\frac{PD}{PQ} \rightarrow \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Man viser dette ved Hjælp af den foregaaende Sætning, idet man gennem A drager en Linie, som skærer Kurven i B og C (se Figuren), og benytter, at Buerne AP, BQ, CR er forsvindende i Forhold til AD og DB (mere bestemt udtrykt $AP : AD$ konvergerer mod Nul), hvorved Sætningen i Virkeligheden reduceres til den foregaaende.

Ogsaa paa variable Kurver $y = f(x, \lambda)$, der opfylder de i Hjælpesætning II nævnte Betingelser, kan Sætningen anvendes.

60. I de i det foregaaende fremsatte Hjælpesætninger er der stadig Tale om Tangenter parallele med visse Linier, som skærer Kurverne i Punkter, der konvergerer mod Vendepunktet. Sætningerne vil imidlertid alle vedblive at gælde, selv om man i Stedet for at tage Tangenter, som er parallele med de paagældende Linier, tager saadanne Tangenter, som skærer disse Linier i Punkter i endelig Afstand, naar blot disse Skæringspunkter konvergerer mod Grænsestillinger, der ikke falder sammen med Vendepunktet. Dobbeltforholdet $(PABC)$ mellem 3 Punkter A, B, C paa en ret Linie, hvilke alle konvergerer mod en fælles Grænsestilling, og et Punkt P, der konvergerer mod en anden Grænsestilling, vil nemlig være uafhængigt af disse Grænsestillingers indbyrdes Beliggenhed, idet $\frac{PB}{PC}$ i alle Tilfælde konvergerer mod 1, naar blot, som her forudsat, P har en Grænsestilling, der er forskellig fra den fælles Grænsestilling for B og C.

Med den her nævnte Udvidelse vil de foregaaende Hjælpesætninger have temmelig vidtgaaende Anvendelser ved almindelige Undersøgelser over Krumningsforhold paa Flader. I det følgende vil vi give et Eksempel paa en saadan Anvendelse.

61. Den Flade, vi betragter, antages at være en E-Flade, og vi vil yderligere forudsætte, at den lader sig fremstille ved en Ligning af Formen $z = f(x, y)$, hvor $f(x, y)$ har endelige og kontinuerte Differentialkvotienter af 3. Orden (iøvr. som i 52).

Lad P være et Punkt paa Fladen (Fig. 21) og lad Tangentplanen Π i Punktet være sammenfaldende med Tegneplanen; den skærer Fladen i de konvekse Buer k_1 og k_2. Den første af disse Buer har Tangenten t i P. Vi omskriver nu Fladen med en Cylinder med Frembringerretning t. Et plant Snit gennem Linien s' parallel med t og $\perp$ Tegneplanen frembringer i Fladen en Snitkurve gennem de Punkter A, B, C, hvor s' skærer k_1 og k_2. Dette Snit s er paa Figuren fremstillet i Projektion paa en Plan parallel med s $(R''A''M''B''N''C''Q'')$. M og N er det højeste og laveste Punkt paa Buerne AB og BC, og naar s' bevæger sig kontinuert mod t, vil M og N gennemløbe Røringskurven r (MPN) for den søgte omskrevne Cylinder.

Denne Røringskurve berører t i P og dens 2 Buer MP og NP (i en passende Omegn af P, hvilket stadig er forudsat ved hver enkelt af disse Undersøgelser), ligger paa hver sin Side af Tangentplanen. Halvplanerne $t(M)$ og $t(N)$, begrænsede af t og gaaende gennem henholdsvis M og N, vil i Følge tidligere Undersøgelser (29) konvergere mod den Halvplan i Tangentplanen, som begrænses af t og indeholder k_1. Sidstnævnte Halvplan er altsaa Oskulationshalvplan for r i Punktet P. Projektionen r' af r ligger inden for den konkave Side af k_1.

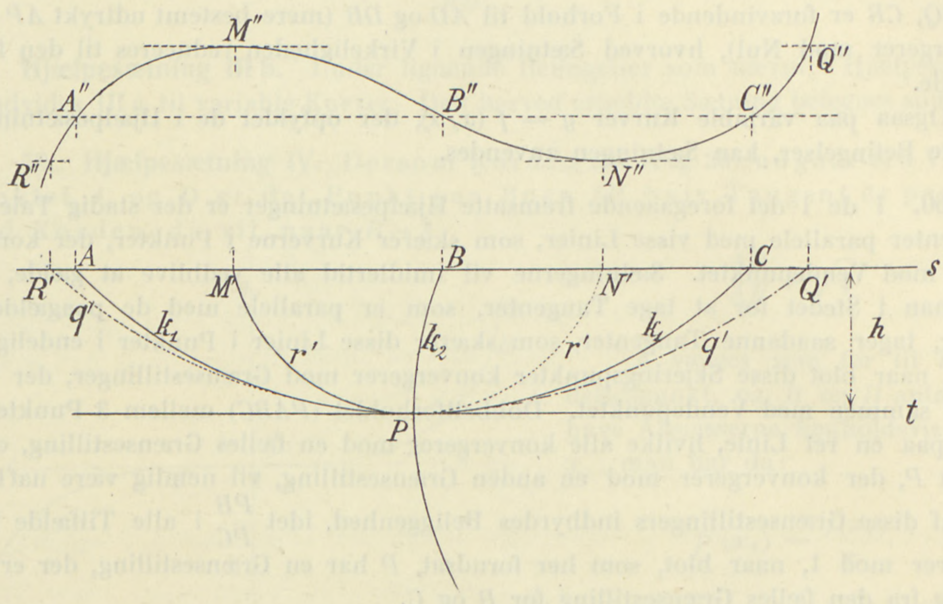

Fig. 21.

Idet vi betegner Afstanden fra s' til t med h, kan man opskrive følgende Udtryk for Krumningsradierne[1]) ρ_1 og ρ_3 til Kurverne r og k_1 i Punktet P:

$$2\rho_1 = \lim \frac{(BN')^2}{h},$$

$$2\rho_3 = \lim \frac{(BC)^2}{h},$$

altsaa

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \lim \left(\frac{BN'}{BC}\right)^2$$

Men efter Hjælpesætning V vil dette straks give

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \tfrac{1}{3}.$$

[1]) d. e. Radier i de oskulerende Cirkler.

Den nævnte Hjælpesætning er her anvendt paa den variable Kurve s, og efter vore Forudsætninger om Fladen, vil denne Kurve netop opfylde de Betingelser (se Hjælpesætning II), som er Grundlaget for Gyldigheden af V. Fladen fremstilles nemlig ved en Ligning $z = f(x, y)$, hvor $f(x, y)$ har kontinuerte partielle Differentialkvotienter af 3. Orden, og det er forudsat, at Udtrykkene

$$r + 2sa + ta^2 \text{ og } A + 3Ba + 3Ca^2 + Da^3$$

ikke samtidig kan være Nul; og disse Betingelser vil vedblive at gælde, om man specielt lader x-Aksen falde paa t, Begyndelsespunktet i P og xy-Planen i Π. Og Snittet s vil da netop fremstilles ved en Ligning af Formen $z = f(x, h)$, hvor $f_x'''(x, h)$ i Omegnen af Begyndelsespunktet ikke har den nedre Grænse Nul. For det specielle Koordinatsystem har man nemlig $r = 0$, $t = 0$, saa at de to ovennævnte Udtryk reduceres til

$$2sa,\ A + 3Ba + 3Ca^2 + Da^3$$

og da disse ikke samtidig maa være Nul, har man $A \neq 0$, d. v. s. $f_x'''(0, 0) \neq 0$. Man ser altsaa, at Betingelserne for Anvendelsen af Hjælpesætning V virkelig er til Stede.

62. Den omskrevne Cylinderflade skærer Fladen paa ny i en Kurve q, af hvilken man paa s findes 2 Punkter Q, R ved Skæring med Tangenterne i M og N. Projektionen af q paa Tegneplanen er q'. Kurven q' (og q selv) berører ogsaa t i P (som tidligere vist) og har, som man straks ser (ligesom ved de tidligere analoge Undersøgelser), samme Oskulationshalvplan som r, nemlig Halvplanen $t(k_1)$, som begrænses af t og indeholder k_1. Krumningsradien til q' er i Punktet P aabenbart den samme som Krumningsradien til selve Kurven q[1]). Vi betegner denne Radius med ρ_4. Man har da

$$2\rho_4 = \lim \frac{(BQ')^2}{h},$$

altsaa (se ovenfor):

$$\frac{\rho_1}{\rho_4} = \lim \left(\frac{BN'}{BQ'}\right)^2 = \lim \left(\frac{B''N''}{B''Q''}\right)^2.$$

Da nu

$$\frac{B''N''}{M''B''} \to 1,$$

og

$$\frac{M''N''}{M''Q''} \to \tfrac{2}{3},$$

har man

$$\frac{M''B''}{B''Q''} \to \tfrac{1}{2}$$

altsaa

$$\frac{\rho_1}{\rho_4} = \tfrac{1}{4}.$$

---

[1]) Vi bruger stadig Udtrykket Krumningsradius som Betegnelse for Radien i den oskulerende Cirkel.

Naar vi nu endelig hertil føjer den bekendte Sætning af Beltrami, at Krumningsradius ρ_2 til den Hovedtangentkurve, der berører t i P, er $\frac{2}{3}$ af Krumningsradien til Kurven k_1, en Sætning, der iøvrigt overmaade let udledes af Hovedtangentkurvens Differentialligning, kan man sammenfatte alle disse Resultater i følgende **Sætning om de 4 Krumninger:**

Naar man til hver Hovedtangent t med Røringspunkt P bestemmer følgende 4 Kurver, der berører t i P og har fælles Oskulationshalvplan i dette Punkt:

1) Røringskurven for den i Retningen t omskrevne Cylinder;
2) Hovedtangentkurven;
3) Skæringskurven med Tangentplanen;
4) Skæringskurven mellem Fladen og den i Retningen t omskrevne Cylinderflade;

da vil disse 4 Kurvers Krumningsradier i P forholde sig som de paa hinanden følgende hele Tal 1 : 2 : 3 : 4.

63. Her skal til Slut tilføjes den Bemærkning, at man efter de tidligere fremsatte Betragtninger angaaende de benyttede Hjælpesætningers almindeligste Form (60), straks kan indse, at vi i Stedet for at betragte Rørings- og Skæringskurven for den omskrevne Cylinder i Retningen t ligesaa godt kunde tage Rørings- og Skæringskurven for en omskreven Kegle med Toppunkt i et vilkaarligt Punkt af t, idet man dog maa tage det Forbehold, at Toppunktet maa være forskelligt fra P. Dette Undtagelsestilfælde behandles i øvrigt let, idet man efter Hjælpesætning III b straks vil se, at Røringskurven for den omskrevne Kegle i dette Tilfælde vil faa halvt saa stor Krumningsradius som Tangentplanens Snit i Fladen; dette udledes ved Betragtning af Figur 17. Men i alle de øvrige Tilfælde gælder ovennævnte Sætning om de 4 Krumninger.

Endelig skal det bemærkes, at de foranstaaende Hjælpemidler vil vise sig frugtbare overfor alle Undersøgelser, hvor man har med Krumningsforhold at gøre, som angaar Rørings- og Skæringskurver for omskrevne Flader, ogsaa naar disse ikke er Kegle- eller Cylinderflader. Saaledes vil omskrevne udfoldelige Flader give ganske lignende Resultater som Keglefladér, og omskrevne vindskæve Flader vil man ogsaa kunne behandle ad denne Vej.